



第 6 章

机 械 波

如

果在空间某处发生的振动,以有限的速度向四周传播,则这种传播着的振动称为波.机械振动在连续介质内的传播叫作**机械波**;电磁振动在真空或介质中的传播叫作**电磁波**;近代物理指出,微观粒子以至任何物体都具有波动性,这种波叫作**物质波**.不同性质的波动虽然机制各不相同,但它们在空间的传播规律却具有共性.

本章以机械波为例,讨论波动运动规律.



本章提要



6.1 机械波的形成和传播

6.1.1 机械波产生的条件

将石子投入平静的水池中,投石处的水质元会发生振动,振动向四周水面传播而泛起的涟漪即为水面波.音叉振动时,引起周围空气的振动,此振动在空气中传播叫作声波.可见,机械波的产生必须具备两个条件:①有作机械振动的物体,谓之波源;②有连续的介质(从宏观来看,气体、液体、固体均可视作连续体).

如果波动中使介质各部分振动的回复力是弹性力,则称为弹性波.例如,声波即为弹性波.机械波不一定是弹性波,如水面波就不是弹性波.水面波中的回复力是水质元所受的重力和表面张力,它们都不是弹性力.下面我们只讨论弹性波.

6.1.2 横波和纵波

按振动方向与波传播方向之间的关系可分为横波与纵波.振动方向与传播方向垂直的波叫作横波,平行的称为纵波.

图 6.1 是横波在一根弦线上传播的示意图.将弦线分成许许多多可视为质点的小段,质点之间以弹性力相联系.设 $t = 0$ 时,质点都在各自的平衡位置,此时质点 1 在外界作用下由平衡位置向上运动.由于弹性力的作用,质点 1 即带动质点 2 向上运动.继而质点 2 又带动质点 3……,于是各质点就先后上、下振动起来.图中画出了不同时刻各质点的振动状态.设波源的振动周期为 T .由图可知, $t = T/4$ 时,质点 1 的初始振动状态传到了质点 4, $t = T/2$ 时,质点 1 的初始振动状态传到了质点 7……, $t = T$ 时,质点 1 完成了一次全振动,其初始振动状态传到了质点 13.此时,质点 1 至质点 13 之间各点偏离各自平衡位置的矢端曲线就构成了一个完整的波形.在以后的过程中,每经过一个周期,就向右传出一个完整波形.可见沿着波的传播方向向前看去,前面各质点的振动相位都依次落后于波源的振动相位.

横波的振动方向与传播方向垂直.说明当横波在介质中传播时,介质中层与层之间将发生相对位错,即产生切变.只有固体能承受切变,因此横波只能在固体中传播.

图 6.2 是纵波在一根弹簧中传播的示意图.在纵波中,质点的振动方向与波的传播方向平行,因此在介质中就形成稠密和稀疏的

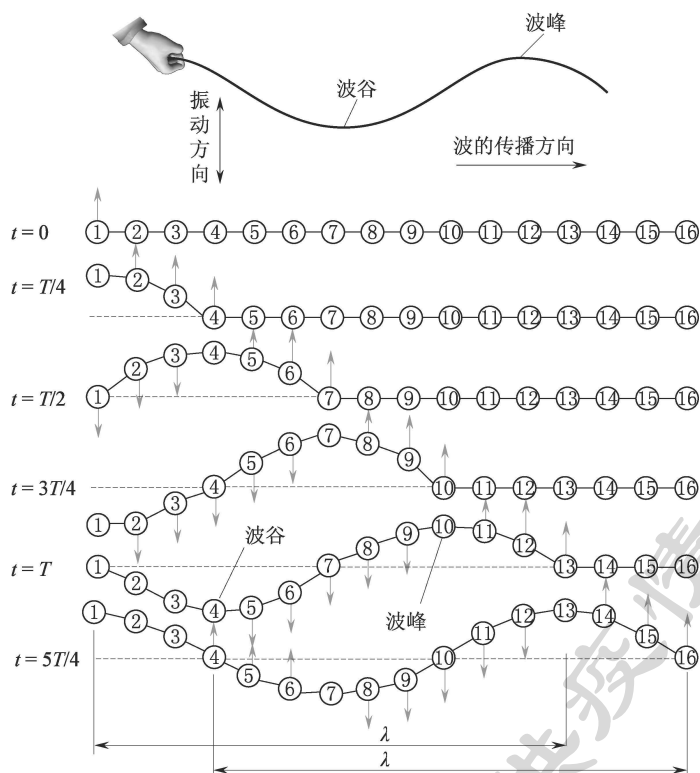


图 6.1 横波传播示意图

区域,故又称为**疏密波**.纵波可引起介质产生容变.固、液、气体都能承受容变,因此纵波能在所有物质中传播.纵波传播的其他规律与横波相同.

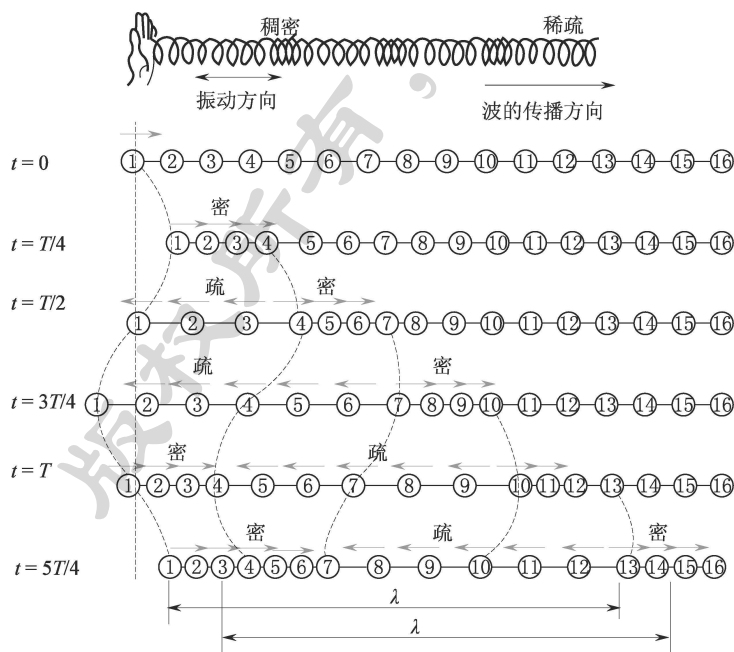


图 6.2 纵波传播示意图

在液面上因有表面张力,故能承受切变.所以液面波是纵波与横波的合成波.此时,组成液体的微元在自己的平衡位置附近作椭圆运动.

综上所述,机械波向外传播的是波源(及各质点)的振动状态和能量.

6.1.3 波线和波面

为了形象地描述波在空间中的传播,我们介绍如下一些概念.

波传播到的空间称为**波场**.在波场中,代表波的传播方向的射线,称为**波射线**,也简称为**波线**.波场中同一时刻振动相位相同的点的轨迹,谓之**波面**.某一时刻波源最初的振动状态传到的波面叫作**波前**,即最前方的波面.因此,任意时刻只有一个波前,而波面可有任意多个.如图 6.3 所示.

按波面的形状,波可分为平面波、球面波和柱面波等.在各向同性介质中,波线恒与波面垂直.

6.1.4 简谐波

一般来说,波动中各质点的振动是复杂的.最简单而又最基本的波动是**简谐波**,即波源以及介质中各质点的振动都是谐振动.这种情况只能发生在各向同性、均匀、无限大、无吸收的连续弹性介质中.以下我们所提到的介质都是这种理想化的介质.由于任何复杂的波都可以看成由若干个简谐波叠加而成,因此,研究简谐波具有特别重要的意义.

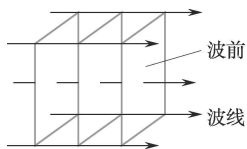
6.1.5 物体的弹性形变

固体、液体和气体在受到外力作用时,不仅运动状态会发生变化,而且其形状和体积也会发生改变,这种改变称为**形变**.如果外力不超过一定限度,在外力撤去后,物体的形状和体积能完全恢复原状,这种形变称为**弹性形变**.这个外力限度称为**弹性限度**.形变有以下几种基本形式:

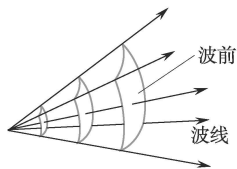
(1) **长变** 如图 6.4 所示,在一棒的两端沿轴向作用两个大小相等、方向相反的一对外力 F 时,其长度发生变化,由 l 变为 $l + \Delta l$,伸长量 Δl 的正负(伸长或压缩)由外力方向决定, $\frac{\Delta l}{l}$ 表示棒长的相对改变,称为**应变**或**胁变**.设棒的横截面积为 S ,则 $\frac{F}{S}$ 称为**应力**或**胁强**.胡克定律指出,在弹性限度范围内,应力与应变成正比,即

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \quad (6.1)$$

式中比例系数 E 只与材料的性质有关,称为杨氏弹性模量,其定义为



(a) 平面波



(b) 球面波

图 6.3 波线和波面

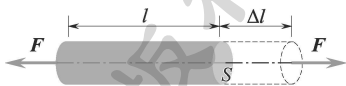


图 6.4 长变

$$E = \frac{F/S}{\Delta l/l} \quad (6.2)$$

(2) 切变 如图 6.5 所示, 在一块材料的两个相对面上各施加一个与平面平行、大小相等而方向相反的外力 F 时, 则块状材料将发生图中所示的形变, 即相对面发生相对滑移, 称为切变. 设施力的平面面积为 S , 则 $\frac{F}{S}$ 称为切变的应力或胁强, 两个施力的相对面相互错开的角度 $\varphi = \arctan \frac{\Delta d}{b}$ 称为切变的应变或胁变. 根据胡克定律, 在弹性限度内, 切变的应力和切应变成正比, 即

$$\frac{F}{S} = G \varphi \quad (6.3)$$

式中 G 是比例系数, 只与材料性质有关, 称为切变弹性模量, 其定义式如下:

$$G = \frac{F/S}{\varphi} \quad (6.4)$$

(3) 容变 当物体(固体、液体或气体)周围受到的压力改变时, 其体积也会发生改变, 这种形变称为容变. 如图 6.6 所示, 物体受到的压强由 p 变为 $p + \Delta p$, 相应地物体的体积由 V 变为 $V + \Delta V$, 显然, ΔV 与 Δp 的符号恒相反. $\frac{\Delta V}{V}$ 表示体积的相对变化, 称为容变的应变. 实验表明, 在弹性限度内, 压强的改变与容应变的大小成正比, 即

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V} \quad (6.5)$$

式中比例系数 B 只与材料性质有关, 称为容变弹性模量, 其定义式为

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad (6.6)$$

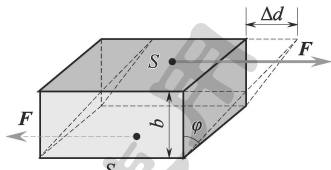


图 6.5 切变

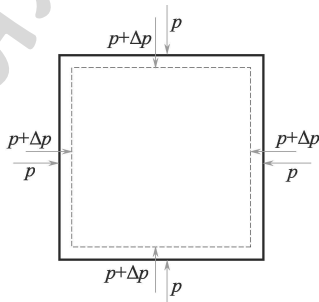


图 6.6 容变

6.1.6 描述波动的几个物理量

1. 波速

波动是振动状态(即相位)的传播, 振动状态在单位时间内传播的距离叫作波速, 因此波速又称相速, 用 u 表示. 对于机械波, 波速通常由介质的性质决定. 可以证明, 对于简谐波, 在固体中传播的横波和纵波的波速分别由式(6.7)、式(6.8) 确定, 即

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (6.7)$$

$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6.8)$$

式中 G 和 E 分别是介质的切变弹性模量和杨氏模量, ρ 为介质的密度. 对于同一固体介质, 一般有 $E > G$, 所以 $u_{\parallel} > u_{\perp}$. 顺便指出, 只有纵波在均匀细长棒中传播时, 式(6.8) 才准确成立, 在非细长棒中, 纵向长变过程中引起的横向形变不能忽略, 因此, 容变不能简化成长变, 式(6.8) 只能近似成立.

在弦中传播的横波波速为

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (6.9)$$

式中 T 是弦中张力, μ 为弦的线密度.

在液体或气体中只能传递纵波, 其波速为

$$u_{//} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (6.10)$$

式中 B 为介质的容变弹性模量. 对于理想气体, 若把波的传播过程视为绝热过程, 则由分子运动理论及热力学方程可导出理想气体中的声速公式为

$$u = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M_{\text{mol}}}} \quad (6.11)$$

式中 γ 为气体的摩尔热容比, p 为气体的压强, ρ 为气体的密度, T 是气体的热力学温度, R 是普适气体恒量, M_{mol} 是气体的摩尔质量.

应该注意, 机械波的波速是相对于介质的传播速度. 若观察者相对于介质为静止, 所测出的波速就是波在介质中的传播速度. 如果观察者相对于介质有运动, 则应根据速度合成的法则计算出机械波相对于观察者的传播速度. 也就是说, 当观察者相对于介质有不同的运动时, 可观测到不同的波速. 此结论不适用于电磁波.

顺便指出, 波速与介质中质点的振动速度是两个不同的概念, 请读者加以区分.

2. 波动周期和频率

波动过程也具有时间上的周期性. **波动周期**是指一个完整波形通过介质中某固定点所需的时间, 用 T 表示. 周期的倒数叫作频率, **波动频率**即为单位时间内通过介质中某固定点完整波的数目, 用 ν 表示. 由于波源每完成一次全振动, 就有一个完整的波形发送出去, 由此可知, 当波源相对于介质为静止时, 波动周期即为波源的振动周期, 波动频率即为波源的振动频率. 波动周期 T 与频率 ν 之间亦有

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \quad (6.12)$$

3. 波长

如前所述, 同一时刻, 沿波线上各质点的振动相位是依次落后的, 则同一波线上相邻的相位差为 2π 的两质点之间的距离叫作**波长**, 用 λ 表示. 当波源作一次全振动, 波传播的距离就等于一个波长, 如图 6.1 所示, 因此波长反映了波的空间周期性. 显然, 波长与波速、周期和频率的关系为

$$\lambda = uT = \frac{u}{\nu} \quad (6.13)$$

此式不仅适用于机械波, 也适用于电磁波.

由于机械波的波速仅由介质的力学性质决定, 因此, 不同频率的波在同一介质中传播时都具有相同的波速, 而同一频率的波在不同介质中传播时其波长不同.

6.2 平面简谐波的波函数

平面简谐波在介质中传播,虽然各质点都在各自的平衡位置附近按余弦(或正弦)规律运动,但同一时刻各质点的振动状态却不尽相同.只有定量地描述出每个质点的振动状态,才算解决了平面简谐波的运动学问题.

在平面简谐波中,波线是一组垂直于波面的平行射线,因此可选用其中一根波线为代表来研究平面波的传播规律.也就是说,我们所需求的平面简谐波的**波函数**,就是任一波线上任一点的振动方程的通式.

6.2.1 平面简谐波的波函数

设有一平面简谐波,在理想介质中沿 x 轴正向传播, x 轴即为某一波线,在此波线上任取一点为坐标原点,并在原点振动相位为零时开始计时,则原点的振动方程为

$$y_0 = A \cos \omega t \quad (6.14)$$

设 P 为 x 轴上任一点,其坐标为 x ,而用 y 表示该处质点偏离平衡位置的位移,如图 6.7 所示,现求 P 点的振动方程.

设波动在介质中的传播速度为 u ,则原点的振动状态传到 P 点所需要的时间为 $\Delta t = \frac{x}{u}$,因此, P 点在 t 时刻将重复原点在 $(t - \frac{x}{u})$ 时刻的振动状态,即 P 点在 t 时刻的振动方程为

$$y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \quad (6.15)$$

式(6.15)就是沿 x 轴正向传播的平面简谐波的表达式,或称**波函数**,有时也称**波动方程**^①.

如 6.1 节所述,当一列波在介质中传播时,沿着波的传播方向向前看去,前方各质点的振动要依次落后于波源的振动.因此,式(6.15)中 $-\frac{x}{u}$ 也可理解为 P 点的振动落后于原点振动的的时间.显然,这列波若沿 x 轴负方向传播,则 P 点的振动超前于原点的振动,超前的时间为 $+\frac{x}{u}$,此时 P 点的振动方程为

$$y = A \cos \omega \left(t + \frac{x}{u} \right) \quad (6.16)$$



平面简谐波的波函数

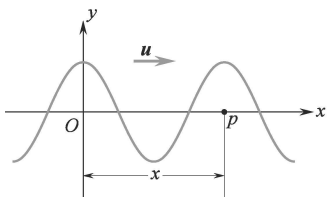


图 6.7 波函数的推导

① 平面简谐波也可用复数表示为 $y(x, t) = A e^{i\omega(t - \frac{x}{u})}$, 和简谐振动中一样,在经典物理中我们只取其实部.

这就是沿 x 轴负向传播的平面简谐波的表达式.

若波源(原点)的振动初相位在开始计时不为零,即

$$y_0 = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.17)$$

由于波源的初相位对波传播过程的贡献是固定的,与波的传播方向、时间、距离无关,因此波函数为

$$y = A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] \quad (6.18)$$

将 $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, $u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\lambda$ 代入式(6.18),经整理,可得到如下几种常用的波函数:

$$y = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \quad (6.19)$$

$$y = A\cos\left[2\pi\nu t \mp \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right] \quad (6.20)$$

$$y = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(ut \mp x) + \varphi_0\right] = A\cos[k(ut \mp x) + \varphi_0] \quad (6.21)$$

式中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 称为波矢,它表示在 2π 长度内所具有的完整波的数目.

6.2.2 波函数的物理意义

为了深刻理解平面简谐波波函数的物理意义,下面分几种情况进行讨论.

(1) 如果 $x = x_0$ 为给定值,则位移 y 仅是时间 t 的函数: $y = y(t)$,波函数蜕化为

$$y(t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega x_0}{u} + \varphi_0\right) = A\cos\left(\omega t - 2\pi \frac{x_0}{\lambda} + \varphi_0\right) \quad (6.22)$$

这就是波线上 x_0 处质点在任意时刻离开自己平衡位置的位移,上式即为 x_0 处质点的振动方程,表明任意坐标 x_0 处质点均在作简谐振动,相应可作出其振动曲线如图 6.8 所示.

由式(6.22)可知, x_0 处质点在 $t = 0$ 时刻的位移为

$$\begin{aligned} y(0, x_0) &= A\cos\left(-\frac{\omega x_0}{u} + \varphi_0\right) \\ &= A\cos\left(-2\pi \frac{x_0}{\lambda} + \varphi_0\right) \end{aligned}$$

该处质点的振动初相位为 $\varphi' = -\frac{\omega x_0}{u} + \varphi_0 = -2\pi \frac{x_0}{\lambda} + \varphi_0$,显然 x_0 处

质点的振动相位比原点 O 处质点的振动相位始终落后一个值 $\frac{\omega x_0}{u}$

或 $2\pi \frac{x_0}{\lambda}$, x_0 越大,相位落后越多,因此,沿着波的传播方向,各质点

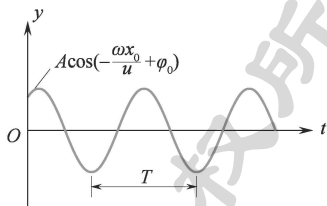


图 6.8 波线上给定点的振动曲线

的振动相位依次落后. $x_0 = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$ 各处质点的振动相位依次为 $\varphi' = -2\pi + \varphi_0, -4\pi + \varphi_0, -6\pi + \varphi_0, \dots$ 这正好表明波线上每隔一个波长的距离, 质点的振动曲线就重复一次, 波长的确代表了波的空间周期性.

读者自己可以导出同一质点在相邻两个时刻的振动相位差为

$$\Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) = \frac{t_2 - t_1}{T} 2\pi \quad (6.23)$$

这说明波动周期反映了波动在时间上的周期性.

(2) 如果 $t = t_0$ 为给定值, 则位移 y 只是坐标 x 的函数: $y = y(x)$, 波函数变为

$$y = A\cos\left[\omega\left(t_0 - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] \quad (6.24)$$

这时方程给出了在 t_0 时刻波线上各质点离开各自的平衡位置的位移分布情况, 称为 t_0 时刻的**波形方程**. t_0 时刻的波形曲线如图 6.9 所示, 它是一条简谐函数曲线, 正好说明它是一列简谐波. 应该注意的是, 对横波, t_0 时刻的 $y-x$ 曲线实际上就是该时刻统观波线上所有质点的分布图形; 而对于纵波, 波形曲线并不反映真实的质点分布情况, 而只是该时刻所有质点的位移分布.

由上面的讨论, 读者自己可以导出, 同一波线上两质点之间的相位差为

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \quad (6.25)$$

(3) 如果 t, x 都在变化, 波函数

$$y(t, x) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

给出了波线上各个不同质点在不同时刻的位移, 或者说它包括了各个不同时刻的波形, 也就是反映了波形不断向前推进的波动传播的全过程.

进一步分析波函数便可更深入了解波动的本质.

根据波函数可知, t 时刻的波形方程为

$$y(x) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

而 $t + \Delta t$ 时刻的波形方程为

$$y(x) = A\cos\left[\omega\left(t + \Delta t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

我们分别用实线和虚线表示 t 时刻和稍后的 $t + \Delta t$ 时刻的两条波形曲线, 如图 6.10 所示, 便可形象地看出波形向前传播的图像, 波形向前传播的速度就等于波速 u .

设 t 时刻、 x 处的某个振动状态经过 Δt , 传播了 $\Delta x = u\Delta t$ 的距离, 用波函数表示即为

$$A\cos\left[\omega\left(t + \Delta t - \frac{x + u\Delta t}{u}\right) + \varphi_0\right] = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

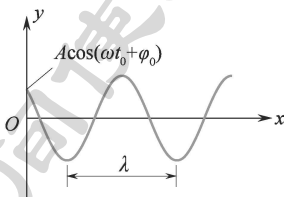


图 6.9 给定时刻($t = t_0$)的波形



波函数的物理意义

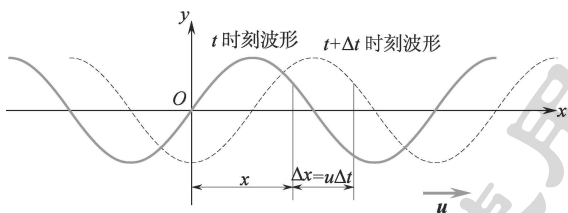


图 6.10 波形的传播

$$\text{亦即} \quad y(t + \Delta t, x + \Delta x) = y(t, x) \quad (6.26)$$

这就是说,想获取 $t + \Delta t$ 时刻的波形,只要将 t 时刻的波形沿波的前进方向移动 $\Delta x (= u\Delta t)$ 距离即可得到.故式(6.26)描述的波称为行波.

* 6.2.3 波动微分方程与波速

仅从运动学角度研究波还不够,只有对波作动力学分析才能看到波传播的机制并能进一步研究波动.

1. 波动微分方程

在媒质中取出体元,分析受力情况和应用动力学规律.以下仅以平面横波为例讨论.

图 6.11 表示横波在某瞬时的波形图,取位于 x 和 $x + \Delta x$ 处两波面所围体元为隔离体.体元两侧受剪切力 f_x 和 $f_{x+\Delta x}$ 作用.相比之下重力可不计.体元发生剪切变形,剪切应变为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$.用 S 表示体元横截面积,根据胡克定律有

$$\frac{f_x}{S} = \frac{dy}{dx} \Big|_x G$$

G 为切变模量.

体元 y 坐标是 (x, t) 的函数.现在讨论某瞬时的情况, t 视为定值.上式可写成偏导数形式:

$$\frac{f_x}{S} = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_x G$$

$$\text{同理也可自 } x + \Delta x \text{ 处得} \quad \frac{f_{x+\Delta x}}{S} = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} G$$

$$\text{体元所受合外力为} \quad f_{x+\Delta x} - f_x = \left[\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_x \right] GS$$

方括号内为函数 $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$ 在 Δx 上的增量.若不计高阶无穷小,有

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_x = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_x \Delta x$$

$$\text{代入上式得} \quad f_{x+\Delta x} - f_x = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_x \Delta x GS$$

体积元在上述合外力作用下加速度为 $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$, 故有

$$f_{x+\Delta x} - f_x = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

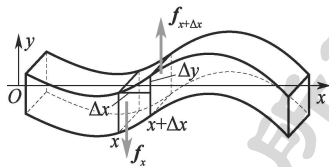


图 6.11 当波传播时,
媒质内某体元的
受力和形变

式中 Δm 为体元质量, 用 ρ 表示媒质密度, 因 $\Delta m = \rho S \Delta x$, 由上两式得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (6.27)$$

此即弹性媒质中横波的波动微分方程.

依照类似方法, 可得固体内弹性平面纵波的波动微分方程为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (6.28)$$

式中 ρ 表示媒质密度, E 为杨氏模量. 至于张紧柔软线绳上传播横波的波动微分方程则为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (6.29)$$

T 为线绳所受张力, μ 为单位长度线绳的质量, 称为线密度.

以上的波函数均根据质点动力学方程得出, 故波动微分方程即是关于波的动力学方程. 该方程的未知函数为 $y(x, t)$, 方程中 y 的两个偏导数都是以线性方式出现的, 故本节讨论的波函数是线性的.

2. 波速

波动微分方程给出了媒质内体元的运动和受力的关系, 反映了波动传播的机制, 对应于经典力学的动力学方程. 而波函数对应于运动学方程. 故波函数是波动微分方程的解. 平面简谐波为平面波的特例, 故平面简谐波函数应为波动微分方程一特殊的解.

将平面简谐波的波函数(6.18) 分别对 t 和 x 求二阶偏导数, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -A\omega^2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -A \frac{\omega^2}{u^2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] \end{aligned}$$

比较上面两式可得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (6.30)$$

将其与式(6.27) 相比, 即可得固体中弹性横波波速为

$$u_{\perp} = \sqrt{G/\rho}$$

同理可得固体中弹性纵波波速为

$$u_{\parallel} = \sqrt{E/\rho}$$

由此可知, 固体中波速和媒质弹性密切相关. 现在有多种精确测量声速或测出固体的杨氏模量和切变模量的方法. 至于张紧软绳中横波波速则为

$$u_{\perp} = \sqrt{T/\mu}$$

流体中纵波的波速为

$$u_{\parallel} = \sqrt{B/\rho}$$

B 为流体的体变模量.

以上即为(6.7)、(6.8)、(6.9)、(6.10) 各式的根由.

表 6.1 给出某些波速实验值, L 和 T 分别表示纵波和横波. 表中顺便列出的波阻(或声阻), 其在 6.5 节中才讲.

表 6.1 波速和波阻

媒质	温度(°C)	波速(m/s)	波阻(Ns/m ³)
空气	0	331.45	429

续表

媒质	温度(℃)	波速(m/s)	波阻(Ns/m ³)
氧气	0	316	452
氢气	0	1 284	116
水	20	1 483	1.48×10 ⁶
水银	20	1 451	19.6×10 ⁶
液氮	−272.15	239	0.035×10 ⁶
液氧	−183	909	1.04×10 ⁶
血液		~1 530	~1.62×10 ⁶
肌肉		~1 545—1 630	~1.65×10 ⁶ —1.74×10 ⁶
骨骼		~2 700—4 100	~3.2×10 ⁶ —7.4×10 ⁶
铁		L:5 950	47.0×10 ⁶
		T:3 240	
铝		L:6 420	17.3×10 ⁶
		T:3 040	
火石玻璃		L:3 980	15.4×10 ⁶
		T:2 380	

例 6.1

已知波函数为 $y = 0.1\cos\frac{\pi}{10}(25t - x)$, 其中 x, y 的单位为 m, t 的单位为 s, 求: (1) 振幅、波长、周期、波速; (2) 距原点为 8 m 和 10 m 两点处质点振动的相位差; (3) 波线上某质点在时间间隔 0.2 s 内的相位差.

解 (1) 用比较法, 将题给的波函数改写成如下形式

$$y = 0.1\cos\frac{25}{10}\pi\left(t - \frac{x}{25}\right)$$

并与波函数的标准形式 $y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$

比较, 即可得

$$A = 0.1\text{ m}, \quad \omega = \frac{25}{10}\pi\text{ s}^{-1},$$

$$u = 25\text{ m/s}, \quad \varphi_0 = 0$$

所以 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.8\text{ s}, \lambda = uT = 20\text{ m}.$

(2) 同一时刻波线上坐标为 x_1 和 x_2 两点处质点振动的相位差

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = -2\pi\frac{\delta}{\lambda}$$

$\delta = x_2 - x_1$ 是波动传播到 x_1 和 x_2 处的波程之差, 上式就是同一时刻波线上任意两点间相位差与波程差的关系.

$$\delta = x_2 - x_1 = 10 - 8 = 2\text{ m 时},$$

$$\Delta\varphi = -2\pi\frac{\delta}{\lambda} = -\frac{\pi}{5}.$$

负号表示 x_2 处的振动相位落后于 x_1 处的振动相位.

(3) 对于波线上任意一个给定点 (x 一定), 在时间间隔 Δt 内的相位差

$$\Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t$$

$$\Delta t = 0.2\text{ s}, \text{ 则 } \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

例 6.2

一平面波在介质中以速度 $u = 20 \text{ m/s}$ 沿直线传播, 已知在传播路径上某点 A 的振动方程为 $y_A = 3\cos 4\pi t$, 如图 6.12 所示. (1) 若以 A 点为坐标原点, 写出波函数, 并求出 C, D 两点的振动方程; (2) 若以 B 点为坐标原点, 写出波函数, 并求出 C, D 两点的振动方程.

解 已知 $u = 20 \text{ m/s}, \omega = 4\pi$, 则

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.5 \text{ s}, \quad \lambda = uT = 10 \text{ m}$$

(1) 若以 A 点为坐标原点, 则原点的振动方程为 $y_0 = y_A = 3\cos 4\pi t$, 所以波函数为

$$y = 3\cos 4\pi \left(t - \frac{x}{20} \right) = 3\cos \left(4\pi t - \frac{\pi}{5}x \right)$$

其中 x 是波线上任意一点的坐标 (以 A 为坐标原点), 对 C 点, $x_C = -13 \text{ m}$; 对 D 点, $x_D = 9 \text{ m}$, 故可直接写出 C 点和 D 点的振动方程分别为

$$y_C = 3\cos \left(4\pi t - \frac{\pi}{5}x_C \right) = 3\cos \left(4\pi t + \frac{13}{5}\pi \right)$$

$$y_D = 3\cos \left(4\pi t - \frac{\pi}{5}x_D \right) = 3\cos \left(4\pi t - \frac{9}{5}\pi \right)$$

(2) 若以 B 点为坐标原点, 则原点的振动方程为 $y_0 = y_B$. 由于波从左向右传播, 因此 B 点的振动始终比 A 点超前一段时间 $\Delta t = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \text{ s}$, 故 B 点在 t 时刻的振动状态与 A 点在 $t + \Delta t$ 时刻的振动状态相同, 即

$$\begin{aligned} y_0 &= y_B(t) = y_A(t + \Delta t) = 3\cos 4\pi \left(t + \frac{1}{4} \right) \\ &= 3\cos(4\pi t + \pi) \end{aligned}$$

此时波函数为

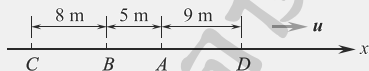


图 6.12

$$y = 3\cos \left[4\pi \left(t - \frac{x}{20} \right) + \pi \right] = 3\cos \left(4\pi t - \frac{\pi}{5}x + \pi \right)$$

其中 x 是波线上任意一点的坐标 (以 B 为坐标原点), 所以对 C 点, $x_C = -8 \text{ m}$; 对 D 点, $x_D = 14 \text{ m}$, 代入波函数可写出 C 点和 D 点的振动方程分别为

$$y_C = 3\cos \left(4\pi t + \frac{8}{5}\pi + \pi \right) = 3\cos \left(4\pi t + \frac{13}{5}\pi \right)$$

$$y_D = 3\cos \left(4\pi t - \frac{\pi}{5} \times 14 + \pi \right) = 3\cos \left(4\pi t - \frac{9}{5}\pi \right)$$

从本例的讨论可以看出, 对一列给定的平面波, 坐标原点选取不同, 波函数的形式就不同, 但每个质点的振动方程却是相同的, 即每个质点的振动规律是确定的, 与坐标原点的选取无关.

例 6.3

一平面简谐横波以 $u = 400 \text{ m/s}$ 的波速在均匀介质中沿 x 轴正向传播. 位于坐标原点的质点的振动周期为 0.01 s , 振幅为 0.1 m , 取原点处质点经过平衡位置且向正方向运动时作为计时起点. (1) 写出波函数; (2) 写出距原点为 2 m 处的质点 P 的振动方程; (3) 画出 $t = 0.005 \text{ s}$ 和 0.0075 s 时的波形图; (4) 若以距原点 2 m 处为坐标原点, 写出波函数.

解 (1) 由题意知, 坐标原点 O 处质点的振动初始条件为: $t = 0$ 时, $y_0 = 0, v_0 > 0$. 设原点 O 处质点的振动方程为 $y_0 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, 将初始条件代入, 可求出原点处质点的振动初相位 $\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi$, 原点的振动方程为

$$y_0 = 0.1\cos \left(200\pi t + \frac{3}{2}\pi \right)$$

故可写出波函数为

$$y = 0.1\cos \left[200\pi \left(t - \frac{x}{400} \right) + \frac{3}{2}\pi \right]$$

(2) P 点 $x_P = 2 \text{ m}$, 代入上面波函数即可写出 P 质点的振动方程为

$$\begin{aligned} y_P &= 0.1\cos \left[200\pi \left(t - \frac{2}{400} \right) + \frac{3}{2}\pi \right] \\ &= 0.1\cos \left(200\pi t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

(3) 将 $t_1 = 0.005 \text{ s}$ 代入波函数, 得此时刻的波形方程为

$$y = 0.1 \cos \left[200\pi \left(0.005 - \frac{x}{400} \right) + \frac{3}{2}\pi \right]$$

$$= 0.1 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x \right)$$

画出对应的波形曲线如图 6.13 中实线所示. 因为 $T = 0.01 \text{ s}$, 故从 $t_1 = 0.005 \text{ s}$ 到 $t_2 = 0.0075 \text{ s}$ 经历了 $\Delta t = t_2 - t_1 = 0.0025 \text{ s} = \frac{1}{4}T$, 故 $t_2 = 0.0075 \text{ s}$ 时刻的波形图只需将 $t_1 = 0.005 \text{ s}$ 时刻的波形曲线沿着波的传播方向平移 $\frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{4}uT = 1 \text{ m}$ 即可得到, 如图 6.13 中虚线所示.

(4) 由(2)中结果可知, 新坐标原点 O' 的振动方程为

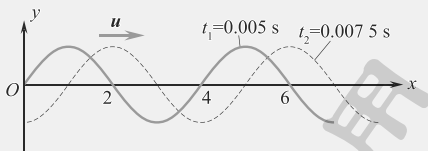


图 6.13

$$y_{O'} = y_P = 0.1 \cos \left(200\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$$

所以新坐标下的波函数为

$$y' = 0.1 \cos \left[200\pi \left(t - \frac{x'}{400} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

式中 x' 是波线上各点在新坐标下的位置坐标.

6.3 波的能量 * 声强

6.3.1 波的能量和能量密度

在波的传播中, 载波的介质并不随波向前移动, 波源的振动能量则通过介质间的相互作用而传播出去. 介质中各质点都在各自的平衡位置附近振动, 因而具有动能; 同时, 介质因形变而具有弹性势能. 下面我们以介质中任一体积元 dV 为例来讨论波动能量.

设有一平面简谐波在密度为 ρ 的弹性介质中沿 x 轴正向传播, 设其波函数为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

在坐标为 x 处取一体积元为 dV , 其质量为 $dm = \rho dV$, 视该体积元为质点, 当波传播到该体积元时, 其振动速度为

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

则该体积元的动能为

$$dE_k = \frac{1}{2} (dm) v^2 = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \quad (6.31)$$

同时, 该体积元因形变而具有弹性势能, 可以证明 (见文中小字), 该体积元的弹性势能为

$$dE_p = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \quad (6.32)$$

于是该体积元内总的波动能量为

$$dE = dE_k + dE_p = \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \quad (6.33)$$

上式表明,波动在介质中传播时,介质中任一体积元的总能量随时间作周期性变化.这说明该体积元和相邻的介质之间有能量交换.体积元的能量增加时,它从相邻介质中吸收能量;体积元的能量减少时,它向相邻介质释放能量.这样,能量不断地从介质中的一部分传递到另一部分.所以,波动过程也就是能量传播的过程.

应当注意,波动的能量和谐振动的能量有着明显的区别.在一个孤立的谐振动系统中,它和外界没有能量交换,所以机械能守恒且动能和势能在不断地相互转换,当动能有极大值时势能为极小,当动能为极小值时势能为极大.而在波动中,体积元内总能量不守恒,且同一体积元内的动能和势能是同步变化的,即动能有极大值时势能也为极大,反之亦然.如图6.14所示,横波在绳上传播时,平衡位置Q处体积元的速度最大因而动能最大,此时Q处体积元的相对形变也最大,因此弹性势能也为最大;在振动位移最大的P处体积元,其振动速度为零,动能等于零,而此处体积元的相对形变量为最小值零($\frac{\partial y}{\partial x} \big|_P = 0$),其弹性势能亦为零.

单位体积介质中所具有的波的能量,称为**能量密度**,用 ω 表示,由式(6.33)有

$$\omega = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \quad (6.34)$$

可见能量密度 ω 随时间作周期性变化,实际应用中是取其平均值.能量密度 ω 在一个周期内的平均值称为**平均能量密度**,用 $\bar{\omega}$ 表示,则对平面简谐波有

$$\bar{\omega} = \frac{1}{T} \int_0^T \omega dt = \frac{1}{T} \int_0^T \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] dt = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (6.35)$$

上式指出,平均能量密度与波振幅的平方、角频率的平方及介质密度成正比.此公式适用于各种弹性波.

波动中介质体积元的弹性势能公式(6.32)推导过程如下:如图6.15,体积元原长为 dx ,绝对伸长量为 dy ,所以体积元的相对伸长(线应变或胁变)为 $\frac{dy}{dx}$,则由式(6.1)可知该体积元所受的弹性力为

$$F = ES \frac{dy}{dx} = k dy$$

式中 E 是棒的杨氏弹性模量, $k = \frac{ES}{dx}$,故体积元的弹性势能为

$$dW_p = \frac{1}{2} k (dy)^2 = \frac{1}{2} \frac{ES}{dx} (dy)^2 = \frac{1}{2} ES dx \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

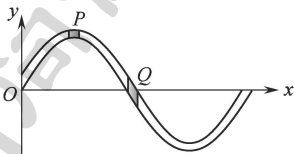


图 6.14 体积元在平衡位置时,相对形变量最大;体积元在最大位移时,相对形变为零

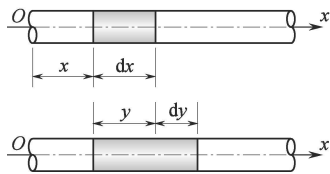


图 6.15 固体细长棒中纵波的传播

因为 $dV = Sdx$, $u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 或 $E = \rho u^2$, 且根据波函数式(6.18) 可得

$$\frac{dy}{dx} = A \frac{\omega}{u} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\begin{aligned} \text{代入得} \quad dW_p &= \frac{1}{2} \rho u^2 (dV) A^2 \frac{\omega^2}{u^2} \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] \\ &= \frac{1}{2} (\rho dV) A^2 \omega^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] \end{aligned}$$

这就是式(6.32). 如果所考虑的是平面余弦弹性横波, 则只要把上面推导中的 $\frac{dy}{dx}$ 和 F 分别理解为体积元的切变和剪切力, 并用切变弹性模量 G 代替杨氏弹性模量 E , 便可得到同样的结果.

6.3.2 波的能流和能流密度

为了描述波动过程中能量的传播, 还需引入能流和能流密度的概念.

所谓**能流**, 即单位时间内通过某一截面的能量. 如图 6.16 所示, 设想在介质中作一个垂直于波速的截面为 ΔS 、长度为 u 的长方体, 则在单位时间内, 体积为 $u\Delta S$ 的长方体内的波动能量都要通过 ΔS 面, 因此通过面积 ΔS 的能流为 $p = \omega u \Delta S$, 将能量密度 ω 用平均能量密度 $\bar{\omega}$ 代替, 可得

$$\bar{p} = \bar{\omega} u \Delta S \quad (6.36)$$

上式中 $\bar{p}$ 称为**平均能流**.

显然, 平均能流 $\bar{p}$ 与截面积 ΔS 有关. 与波的传播方向垂直的单位面积的平均能流称为**能流密度**或波的**强度**, 简称**波强**. 用 I 表示, 则有

$$I = \frac{\bar{p}}{\Delta S} = \bar{\omega} u \quad (6.37)$$

能流密度是一个矢量, 在各向同性介质中, 其方向与波速方向相同, 矢量式为

$$\mathbf{I} = \bar{\omega} \mathbf{u}$$

波强等于波的平均能量密度与波速的乘积.

简谐波的波强的大小为

$$I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u \quad (6.38)$$

即波强与波振幅的平方、角频率的平方成正比. 式(6.38) 只对弹性波成立.

波强的单位是瓦[特] 每平方米 (W/m^2).

若平面简谐波在各向同性、均匀、无吸收的理想介质中传播, 可以证明其波振幅在传播过程中将保持不变.

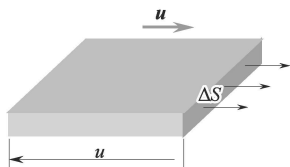


图 6.16 通过 S 面的平均能流

设一平面波的传播方向如图 6.17 所示,在垂直于传播方向上取两个相等面积的平行平面 S_1 和 S_2 ,其平均能流分别为 $\bar{p}_1$ 和 $\bar{p}_2$,因能量无损失,应有

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2$$

$$I_1 S_1 = I_2 S_2$$

即

$$\frac{1}{2} \rho \omega^2 A_1^2 u S_1 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A_2^2 u S_2$$

因 $S_1 = S_2$, 于是有 $A_1 = A_2$

用同样的方法,读者自己可以证明,在理想介质中传播的球面波的振幅随着离波源距离的增加成反比地减小.

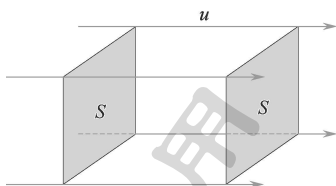


图 6.17 平面波的振幅不变

6.3.3 波的吸收

波在实际介质中传播时,由于波动能量总有一部分会被介质吸收,所以波的机械能会不断地减少,波强亦逐渐减弱,这种现象称为波的吸收.

设波通过厚度为 dx 的介质薄层后,其振幅衰减量为 $-dA$,实验指出

$$-dA = \alpha A dx$$

$$\text{经积分得} \quad A = A_0 e^{-\alpha x} \quad (6.39)$$

式中 A_0 和 A 分别是 $x = 0$ 和 $x = x$ 处的波振幅, α 是常量,称为介质的吸收系数.

由于波强与波振幅平方成正比,所以波强的衰减规律为

$$I = I_0 e^{-2\alpha x} \quad (6.40)$$

式中 I_0 和 I 分别是 $x = 0$ 和 $x = x$ 处波的强度.

*6.3.4 声压、声强和声强级

为了描述声波在介质中各点的强弱,常采用声压和声强两个物理量.

介质中有声波传播时的压力与无声波时的静压力之间的压差称为声压. 由于声波是疏密波,在稀疏区域,实际压力小于静压力,在稠密区域,实际压力大于静压力,前者声压为负值,后者声压为正值. 因介质中各点声振动是周期性变化的,所以声压也在作周期性变化. 对平面简谐波,可以证明声压振幅 p_m 为

$$p_m = \rho u A \omega \quad (6.41)$$

声强就是声波的能流密度,由(6.38)和(6.41)两式,有

$$I = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho u} = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2 \quad (6.42)$$

这说明频率越高越容易获得较大的声压和声强.

引起人的听觉的声波,不仅有频率范围(能引起人耳听觉的频率范围是



人为什么晕车?

20 ~ 20 000 Hz), 而且有声强范围. 对于每个给定频率的可闻声波, 声强都有上、下两个限值, 低于下限的声强不能引起听觉, 高于上限的声强也不能引起听觉, 声强太大则只能引起痛觉. 一般正常人听觉的最高声强为 10 W/m^2 , 最低声强为 10^{-12} W/m^2 . 表 6.2 为声强和声强级举例, 通常把这一最低声强作为测定声强的标准, 用 I_0 表示. 由于上、下声强的数量级相差悬殊(达 10^{13}), 所以常用对数标度作为声强级的量度, 以 L_I 表示, 即

$$L_I = \lg \frac{I}{I_0} \tag{6.43}$$

其单位为贝尔(Bel), 这个单位太大, 常采用贝尔的十分之一, 即分贝(dB) 为单位, 此时声强级公式为

$$L_I = 10 \lg \frac{I}{I_0} \tag{6.44}$$

表 6.2 声强和声强级举例

声 源	声强(W/m^2)	声强级(dB)	响度
听觉阈	10^{-12}	0	
风吹树叶	10^{-10}	20	轻
通常谈话	10^{-6}	60	正常
闹市车声	10^{-5}	70	响
摇滚乐	1	120	震耳
喷气机起飞	10^3	150	
地震(里氏 7 级, 距震中 5 km)	4×10^4	166	
聚焦超声波	10^9	210	

最后顺便指出, 仅用声强级尚不能完全反映人耳对声音响度的感觉. 人耳对响度的主观感觉由声强级和频率共同决定. 例如, 同为 50 分贝声强级的声音, 当频率为 1 000 Hz 时, 人耳听起来已相当响, 而当频率为 50 Hz 时, 则还听不见. 若需要考虑这种效应时, 可去查阅有关手册中列出的等响度曲线.

例 6.4

空气中声波的吸收系数为 $\alpha_1 = 2 \times 10^{-11} \nu^2 \text{ m}^{-1}$, 钢中的吸收系数为 $\alpha_2 = 4 \times 10^{-7} \nu \text{ m}^{-1}$, 式中 ν 代表声波的频率. 问频率为 5 MHz 的超声波透过多厚的空气或钢后其声强减为原来的 1%.

解 $\alpha_1 = 2 \times 10^{-11} \times (5 \times 10^6)^2 = 500 \text{ m}^{-1}$
 $\alpha_2 = 4 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^6 = 2 \text{ m}^{-1}$

由 $I = I_0 e^{-2\alpha x}$

得 $x = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{I_0}{I}$

把 α_1, α_2 之值分别代入上式, 又依题 $I_0/I = 100$, 得空气的厚度为

$$x_1 = \frac{1}{1\,000} \ln 100 = 0.046 \text{ m}$$

钢的厚度为 $x_2 = \frac{1}{4} \ln 100 = 1.15 \text{ m}$

可见高频超声波很难通过气体, 但极易通过固体.

6.4 惠更斯原理 波的叠加和干涉

6.4.1 惠更斯原理

当波在弹性介质中传播时,由于介质质点间的弹性力作用,介质中任何一点的振动都会引起邻近各质点的振动,因此,波动到达的任一点都可看作是新的波源.例如,水面波的传播,如图 6.18 所示,当一块开有小孔的隔板挡在波的前面时,则不论原来的波面是什么形状,只要小孔的线度远小于波长,都可以看到穿过小孔的波是圆形波,就好像是以小孔为点波源发出的一样,这说明小孔可以看作新的波源,其发出的波称为次波(子波).

荷兰物理学家惠更斯观察和研究了大量类似现象,于 1690 年提出了一条描述波传播特性的重要原理:介质中波阵面(波前)上的各点,都可以看作是发射子波的波源,其后任一时刻这些子波的包迹就是新的波阵面.这就是惠更斯原理的内容.

惠更斯原理不仅适用于机械波,也适用于电磁波.而且不论波动经过的介质是均匀的,还是非均匀的,是各向同性的还是各向异性的,只要知道了某一时刻的波阵面,就可以根据这一原理,利用几何作图法来确定以后任一时刻的波阵面,进而确定波的传播方向.此外,根据惠更斯原理,还可以很简单地说明波在传播中发生的反射和折射等现象.下面以平面波和球面波为例,说明惠更斯原理的应用.

如图 6.19(a) 所示,点波源 O 在各向同性的均匀介质中以波速 u 发出球面波,已知在 t 时刻的波阵面是半径为 R_1 的球面 S_1 . 根据惠更斯原理, S_1 上的各点都可以看作是发射子波的新波源,经过 Δt 时间,各子波波阵面是以 S_1 球面上各点为球心,以 $r = u\Delta t$ 为半径的许多球面,这些子波波阵面的包迹面 S_2 就是球面波在 $t + \Delta t$ 时刻的新的波阵面.显然, S_2 是一个仍以点波源 O 为球心,以 $R_2 = R_1 + u\Delta t$ 为半径的球面.

平面波可近似地看作是半径很大的球形波阵面上的一小部分.例如,从太阳射出的球面光波,到达地面上时,就可看作是平面波.如图 6.19(b) 所示,若已知在各向同性均匀介质中传播的平面波在某时刻 t 的波阵面 S_1 ,用惠更斯原理就可以求出以后任一时刻 $t + \Delta t$ 的新的波阵面 S_2 ,它是一个与 S_1 相距 $u\Delta t$,且与 S_1 平行的平面.

从以上讨论可以看出,当波在各向同性均匀介质中传播时,波阵面的几何形状总是保持不变,即波线方向或者波的传播方向是不

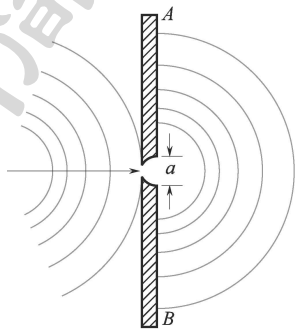
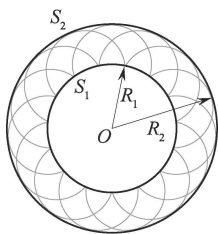


图 6.18 障碍物上的小孔成为新波源



(a) 球面波



(b) 平面波

图 6.19 用惠更斯原理求新波阵面



变的. 当波在不均匀介质或各向异性介质中传播时, 我们同样可以根据惠更斯原理用作图法求出新的波阵面, 只是波阵面的形状和波的传播方向都可能发生变化.

* 应用惠更斯原理证明波的反射和折射定律

当波从一种介质传播到另一种介质的分界面时, 传播方向会发生改变, 其中一部分反射回原介质, 称为反射波; 另一部分进入第二种介质, 称为折射波; 这种现象称为波的反射和折射现象. 通常把入射波、反射波和折射波的波线称为入射线、反射线和折射线. 相应地, 它们与分界面法线之间的夹角分别称为入射角、反射角和折射角. 无数观察和实验表明, 波动反射和折射时分别遵从如下反射定律和折射定律:

(1) 反射定律 反射线、入射线和界面法线在同一平面内, 且反射角 i' 恒等于入射角 i , 即 $i' = i$.

(2) 折射定律 折射线、入射线和界面法线在同一平面内, 且入射角 i 的正弦和折射角 γ 的正弦之比等于第一种介质中波速与第二种介质中波速之比, 即 $\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{u_1}{u_2}$.

下面用惠更斯原理解释波的反射和折射定律:

如图 6.20(a) 所示, 设一平面波传播到两种介质的分界面 MN 上, 它在介质 1 中的波速为 u_1 . 在 t 时刻, 入射波的波阵面到达 $AA_1A_2A_3$ 位置 (波阵面为通过 AA_3 线并与图面垂直的平面), A 点先和分界面相遇, 此后波阵面上 A_1 、 A_2 、 A_3 各点经过相等的时间间隔依次先后到达分界面上的 B_1 、 B_2 、 B_3 各点. 设在 $t + \Delta t$ 时刻, A_3 点传播到界面上 B_3 点, 则 A_1 、 A_2 点依次在 $t + \frac{1}{3}\Delta t$ 、 $t + \frac{2}{3}\Delta t$ 时刻传到界面上 B_1 、 B_2 点. 根据惠更斯原理, 入射波到达界面上的各点都可看作是发射子波的波源, 则在 $t + \Delta t$ 时刻, 从 A 、 B_1 、 B_2 、 B_3 各点向介质 1 中发出的子波半径分别为 $u_1\Delta t$ 、 $\frac{2}{3}u_1\Delta t$ 、 $\frac{1}{3}u_1\Delta t$ 、0, 这些子波的包迹面即为图中的 B_3B 面、 B_3B 面就是 $t + \Delta t$ 时刻的波阵面, 作垂直于此波阵面的直线, 即为反射线. 从图中可以看出, 反射线、入射线和界面法线均在同一个平面内, 且 $\triangle AA_3B_3 \cong \triangle ABB_3$, 故 $\angle A_3AB_3 = \angle BB_3A$, 从而得到 $i = i'$, 即反射角等于入射角, 这就是波的反射定律.

如图 6.20(b) 所示, 一平面波从第 1 介质传到两种介质分界面时, 一部分进入第 2 介质继续传播, 相应地, 波速由 u_1 变为 u_2 . 设在 t 时刻, 入射波的波阵面是 $AA_1A_2A_3$, 此时 A 点已到达分界面, 此后波阵面上 A_1 、 A_2 、 A_3 各点经过相等的时间间隔依次先后到达界面上的 B_1 、 B_2 、 B_3 处. 若假定 $t + \Delta t$ 时刻 A_3 点到达 B_3 处, 则 A_1 、 A_2 到达 B_1 、 B_2 处的时刻分别是 $t + \frac{1}{3}\Delta t$ 、 $t + \frac{2}{3}\Delta t$. A 、 B_1 、 B_2 、 B_3 各点作为新的波源向介质 2 中发出子波, 在 $t + \Delta t$ 时刻, 它们发出的子波半径分别为 $u_2\Delta t$ 、 $\frac{2}{3}u_2\Delta t$ 、 $\frac{1}{3}u_2\Delta t$ 、0, 作出这些子波的包迹 B_3B 面就是此时波动在介质 2 中的波阵面, 作垂直于此波阵面的直线即为折射线. 从图中可以看出, 折射线、入射线和界面法线都在同一个平面内, 且 $A_3B_3 = u_1\Delta t = AB_3\sin i$,

$AB = u_2\Delta t = AB_3\sin \gamma$, 由此可得 $\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{u_1}{u_2}$. 因为 $n_1 = \frac{c}{u_1}$, $n_2 = \frac{c}{u_2}$, 所以有

$$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (6.45)$$

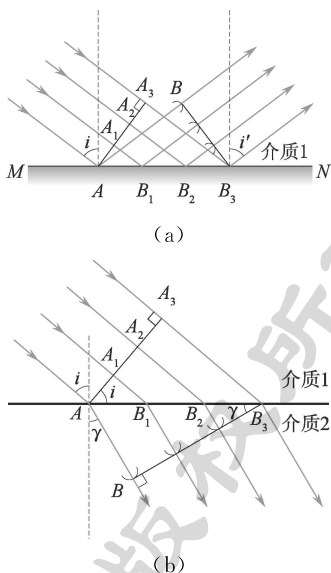


图 6.20 波的反射和折射

其中 n_1 、 n_2 分别为第 1 介质和第 2 介质的折射率; $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$ 称为介质 2 对介质 1 的相对折射率. 这就是波的折射定律.

6.4.2 波的叠加原理

当 n 个波源激发的波在同一介质中相遇时, 观察和实验表明: 各列波在相遇前和相遇后都保持原来的特性(频率、波长、振动方向、传播方向等) 不变, 与各波单独传播时一样; 而在相遇处各质点的振动则是各列波在该处激起的振动的合成. 这就是波传播的**独立性原理**或**波的叠加原理**. 例如, 把两个石块同时投入静止的水中, 两个振源所激起的水波可以互相贯穿地传播. 又如, 在嘈杂的公共场所, 各种声音都传到人的耳朵, 但我们仍能将它们区分开来. 每天空中同时有许多无线电波在传播, 我们却能随意地选取某一电台的广播收听. 这些实例都反映了波传播的独立性. 图 6.21 是波叠加原理的示意图.

波的叠加与振动的叠加是不完全相同的.

振动的叠加仅发生在单一质点上, 而波的叠加则发生在两波相遇范围内的许多质元上, 这就构成了波的叠加所特有的现象, 如下面将要介绍的波的干涉现象; 此外, 正如任何复杂的振动都可以分解为不同频率的许多简谐振动的叠加一样, 任何复杂的波也都可以分解为频率或波长不同的许多平面简谐波的叠加.

两个实物粒子相遇时会发生碰撞, 而两列波相遇则仅在重叠区域构成合成波, 过了重叠区又能分道扬镳而去, 这就是波不同于粒子的一个重要运动特征. 从理论上讲, 波的叠加原理与波函数式 (6.30) 为线性微分方程是一致的. 在我们常常遇到的波动现象中, 线性波函数和波的叠加原理一般都是正确的. 但是当人们的实验观察和理论研究扩大到强波范围时, 介质就会表现出非线性特征, 这时, 波就不再遵从叠加原理, 而线性波函数也不再是正确的, 研究这种情形的新理论称为**非线性波理论**. 本书只讨论叠加原理适用的线性波.

6.4.3 波的干涉

在一般情况下, n 列波的合成波既复杂又不稳定, 没有实际意义. 但满足下述条件的两列波在介质中相遇, 则可形成一种稳定的叠加图样, 即出现所谓干涉现象.

两列波若频率相同、振动方向相同、在相遇点的相位相同或相位差恒定, 则在合成波场中会出现某些点的振动始终加强, 另一些

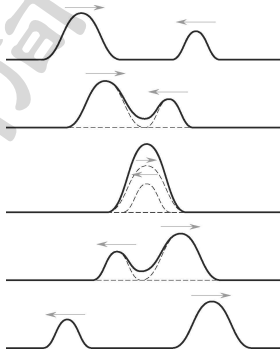


图 6.21 波的独立传播



波的干涉

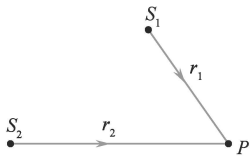


图 6.22 两列
相干波的叠加

点的振动始终减弱(或完全抵消),这种现象称为波的干涉.满足上述条件的波源叫作相干波源,相干波源发出的波谓之相干波.

由以上讨论可知,定量分析波的干涉的出发点仍然是求相干区域内各质元的同频率、同方向谐振动的合成振动.

设 S_1 和 S_2 为两相干波源,它们的振动方程分别为

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) \quad (6.46)$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

式中, ω 为角频率, A_1, A_2 为两波源的振幅, $\varphi_{10}, \varphi_{20}$ 分别为两波源的振动初相位. 设由这两个波源发出的两列波在同一理想介质中传播后相遇(见图 6.22), 现在分析相遇区域中任意一点 P 的振动合成结果.

两列波各自单独传播到 P 点时, 在 P 点引起的振动方程分别为

$$y_1 = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda} + \varphi_{10}\right)$$

$$y_2 = A_2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda} + \varphi_{20}\right)$$

式中 r_1 和 r_2 分别为 S_1 和 S_2 到 P 点的距离, λ 是波长. P 点同时参与了这两个同频率、同方向的谐振动. 从上式容易看出, 这两个分振动的初相位分别为 $\left(-\frac{2\pi r_1}{\lambda} + \varphi_{10}\right)$ 和 $\left(-\frac{2\pi r_2}{\lambda} + \varphi_{20}\right)$. 根据上一章两个同方向、同频率简谐振动的合成结论, P 点的合振动也是简谐振动, 合振动方程为

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.47)$$

而 P 点处合振动的初相位 φ_0 和振幅 A 分别由下面两式给出

$$\tan \varphi_0 = \frac{A_1 \sin\left(\varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2 \sin\left(\varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}{A_1 \cos\left(\varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2 \cos\left(\varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)} \quad (6.48)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta\varphi \quad (6.49)$$

由于波的强度正比于振幅的平方, 若以 I_1, I_2 和 I 分别表示两个分振动和合振动的强度, 则式(6.49)可写成

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi \quad (6.50)$$

式中 $\Delta\varphi$ 是 P 点处两个分振动的相位差

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \quad (6.51)$$

$(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ 是两个相干波源的相位差, 为一常量; $(r_2 - r_1)$ 是两个波源发出的波传到 P 点的几何路程之差, 称为波程差; $2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$ 是两列波之间因波程差而产生的相位差, 对于空间任一给定的 P 点, 它也是常量. 因此, 两列相干波在空间任一给定点所引起的两个分振

动的相位差 $\Delta\varphi$ 也是恒定的,因而合振幅 A 或强度 I 也是一定的.但对于空间中不同点处,波程差 $(r_2 - r_1)$ 不同,故相位差不同,因而不同点有不同的、恒定的合振幅或强度.所以,在两列相干波相遇的区域会呈现出振幅或强度分布不均匀、而又相对稳定的干涉图样.具体讨论如下.

对于满足

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi\left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right) = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.52)$$

的空间各点, $A = A_1 + A_2 = A_{\max}$, $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = I_{\max}$, 合振幅和强度最大,这些点处的振动始终加强,称为干涉加强或干涉相长.

对于满足

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi\left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right) = \pm (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.53)$$

的空间各点, $A = |A_1 - A_2| = A_{\min}$, $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = I_{\min}$, 合振幅和强度最小,这些点处的合振动始终减弱,称为干涉减弱或干涉相消.

进一步地,如果 $\varphi_{10} = \varphi_{20}$,即对于振动初相位相同的两个相干波源,上述干涉加强或减弱的条件可简化为

$$\begin{cases} \delta = r_2 - r_1 = \pm 2k \frac{\lambda}{2} & \text{干涉加强} \\ \delta = r_2 - r_1 = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} & \text{干涉减弱} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.54)$$

以上两式表明,当两个相干波源同相位时,在两列波的叠加区域内,波程差 δ 等于零或半波长偶数倍的各点,振幅和强度最大;波程差 δ 等于半波长奇数倍的各点,振幅和强度最小.

从以上讨论可知,两列相干波叠加时,空间各处的强度并不简单地等于两列波强度之和,反映出能量在空间的重新分布,但这种能量的重新分布在时间上是稳定的,在空间上又是强弱相间且具有周期性的.两列不满足相干条件的波相遇叠加称为波的非相干叠加,这时空间任一点合成波的强度就等于两列波强度的代数和,即

$$I = I_1 + I_2 \quad (6.56)$$

干涉现象是波动所独具的基本特征之一,只有波动的叠加,才可能产生干涉现象.干涉现象在光学、声学中都非常重要,对于近代物理学的发展也起着重大作用.

例 6.5

图 6.23 所示是声波干涉仪. 声波从入口 E 处进入仪器, 分 B 、 C 两路在管中传播, 然后到喇叭口 A 会合后传出. 弯管 C 可以伸缩, 当它渐渐伸长时, 喇叭口发出的声音周期性增强或减弱. 设 C 管每伸长 8 cm , 由 A 发出的声音就减弱一次, 求此声波的频率 (空气中声速为 340 m/s).

解 声波从入口 E 进入仪器后分 B 、 C 两路传播, 这两路声波满足相干条件, 它们在喇叭口 A 处产生相干叠加, 干涉减弱的条件是

$$\delta = \overline{DCA} - \overline{DBA} = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

当 C 管伸长 $x = 8\text{ cm}$ 时, 再一次出现干涉减弱, 即此时两路波的波程差应满足条件

$$\delta' = \delta + 2x = [2(k+1) + 1] \frac{\lambda}{2}$$

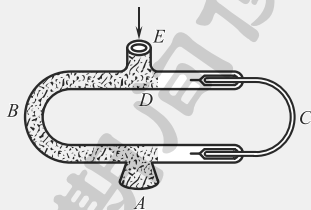


图 6.23 声波干涉仪

以上两式相减得 $\delta' - \delta = 2x = \lambda$, 于是可求出声波的频率为

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{2x} = \frac{340}{2 \times 0.08} = 2\,125\text{ Hz}$$

例 6.6

如图 6.24 所示, 同一介质中有两个相干波源 S_1 、 S_2 , 振幅皆为 $A = 33\text{ cm}$. 当 S_1 点为波峰时, S_2 正好为波谷. 设介质中波速 $u = 100\text{ m/s}$, 欲使两列波在 P 点干涉后得到加强, 这两列波的最小频率为多大?

解 由图示知, $\overline{S_1P} = r_1 = 30\text{ cm}$

$$\overline{S_2P} = r_2 = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\text{ cm}$$

要使从 S_1 、 S_2 两个波源发出的波在 P 点干涉后得到加强, 其波长必须满足

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right) = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

由题意知 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, 而 $r_2 - r_1 = 50 - 30 = 20\text{ cm}$, 代入上式得

$$\pi - \frac{40\pi}{\lambda} = \pm 2k\pi$$

$$\text{即} \quad \lambda = \frac{40}{1 + 2k}$$

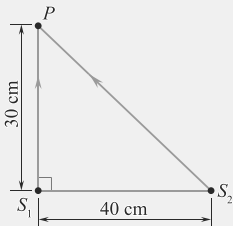


图 6.24

当 $k = 0$ 时, λ 为最大值 $\lambda_{\max}$

$$\lambda_{\max} = \frac{40}{1 + 2k} \Big|_{k=0} = 40\text{ cm} = 0.4\text{ m}$$

$$\text{故} \quad \nu_{\min} = \frac{u}{\lambda_{\max}} = \frac{100}{0.4}\text{ Hz} = 250\text{ Hz}$$

例 6.7

如图 6.25 所示, B 、 C 为同一介质中的两个相干波源, 相距 30 m , 它们产生的相干波频率为 $\nu = 100\text{ Hz}$, 波速 $u = 400\text{ m/s}$, 且振幅都相同. 已知 B 点为波峰时, C 点恰为波谷. 求 BC 连线上因干涉而静止的各点的位置.

解 由题意知,两波源 B 、 C 的振动相位正好相反,即 $\varphi_{C0} - \varphi_{B0} = \pi$, 而 $\lambda = \frac{u}{\nu} =$

$\frac{400}{100} = 4 \text{ m}$. 设 BC 连线上的任意一点 P 与两

个波源的距离分别为 $\overline{BP} = r_B$, $\overline{CP} = r_C$, 要使两列波传到 P 点叠加干涉而使 P 点静止, 则两列波传到 P 点的相位差必须满足

$$\Delta\varphi = \left(-\frac{2\pi r_C}{\lambda} + \varphi_{C0}\right) - \left(-\frac{2\pi r_B}{\lambda} + \varphi_{B0}\right) = \pm(2k+1)\pi$$

可得 $r_B - r_C = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$ (1)

现在进一步作具体讨论:

(1) 若 P 点在 B 左侧, 则 $r_B - r_C = r_B - (r_B + \overline{BC}) = -30 \text{ m}$, 它不可能为 $\lambda = 4 \text{ m}$ 的

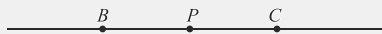


图 6.25

整数倍, 即不满足(1)式要求, 故在 B 点左侧不存在因干涉而静止的点.

(2) 若 P 点在 C 右侧, 与上面类似的讨论可知, C 点右侧也不存在因干涉而静止的点.

(3) 若 P 点在 B 、 C 两波源之间, 则 $r_B - r_C = 2r_B - (r_B + r_C) = 2r_B - \overline{BC}$, 由(1)式可得

$$2r_B - \overline{BC} = \pm k\lambda$$

即 $2r_B - 30 = \pm k\lambda \quad (0, 1, 2, \dots)$

所以在 B 、 C 之间且与波源 B 相距 $r_B = 15 \pm 2k = 1 \text{ m}, 3 \text{ m}, 5 \text{ m}, \dots, 29 \text{ m}$ 的各点会因干涉而静止.

6.5 驻波

驻波是一种特殊的干涉现象. 两列振幅相同、相向传播的相干波的叠加称为**驻波**. 平面简谐波正入射到两种介质的界面上, 入射波和反射波进行叠加即可形成驻波.

6.5.1 驻波方程

设在坐标原点, 入射波和反射波的初相位相同且为零, 用 A 表示它们的振幅, ω 表示它们的角频率, 则它们的运动学方程分别为

$$y_1 = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad y_2 = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

合成波的方程为

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\ &= 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda}x \cos \omega t \end{aligned} \quad (6.57)$$

这就是**驻波方程**. 其中 $\cos \omega t$ 表示谐振动, 而 $\left|2A \cos \frac{2\pi}{\lambda}x\right|$ 即为谐振动的振幅. 式中 x 与 t 被分隔于两个余弦函数中, 说明此函数不满足 $y(t+\Delta t, x+u\Delta t) = y(t, x)$, 因此它不表示行波, 只表示各质点



非线性波、孤波



驻波的特点分析

都在作与原频率相同的简谐振动,但各点的振幅随位置的不同而不同.图 6.26 画出了不同时刻的入射波、反射波和合成波的波形图,图中粗线表示合成波.

6.5.2 驻波的特点

1. 波腹与波节 驻波振幅分布特点

由图 6.26 可以看出,波线上有些点始终不动(振幅为零),称之为波节;而有些点的振幅始终具有极大值,称之为波腹.

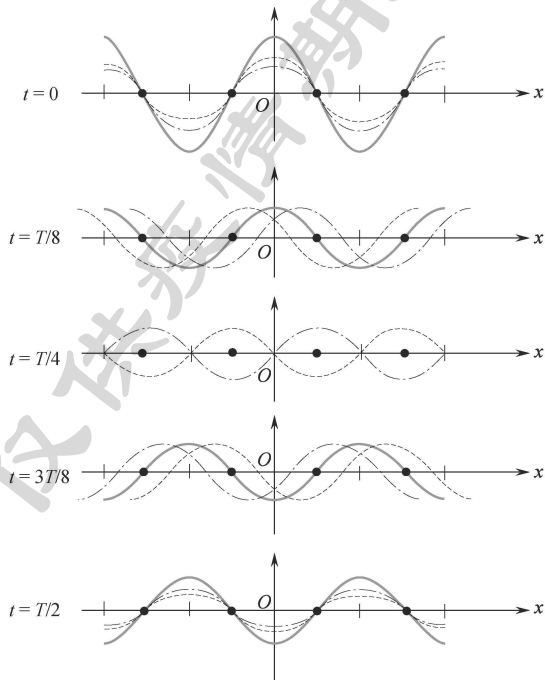


图 6.26 驻波的形成

由式(6.57)可知,对应于使 $\left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0$, 即 $\frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1) \frac{\pi}{2}$ 的各点为波节的位置,因此有波节点坐标

$$x = (2k+1) \frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.58)$$

同理,使 $\left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 1$, 即 $\frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi$ 的各点为波腹的位置,因此有波腹点坐标

$$x = k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.59)$$

由(6.58)、(6.59)两式可知,相邻两个波节或相邻两个波腹之间的距离都是 $\lambda/2$, 而相邻的波节、波腹之间的距离为 $\lambda/4$. 这就为我们提供了一种测定行波波长的方法,只要测出相邻两波节或相邻两波

腹之间的距离就可以确定原来两列行波的波长 λ .

需要说明的是, (6.58)、(6.59) 两式给出的波节、波腹位置的结论不具普遍性, 因它们是从特例中导出的.

介于波腹、波节之间的各质点, 它们的振幅则随坐标位置按

$$\left| 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right| \text{ 的规律变化.}$$

2. 驻波相位的分布特点

在驻波方程(6.57)中, 振动因子为 $\cos \omega t$, 但不能认为驻波中各点的振动相位也相同或如行波中那样逐点不同. x 处的振动位移由 $2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$ 确定, 显然对应于不同的 x 值, $2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$ 可正可负.

如果把相邻两波节之间的各点视为一段, 则由余弦函数的取值规律可知, $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x$ 的值对同一段内的各质点有相同的符号; 对于分别在

相邻两段内的两质点则符号相反(参阅图 6.26). 以 $\left| 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right|$ 作为振幅, 这种符号的相同或相反就表明, 在驻波中, 同一段上的各质点振动相位相同, 相邻两段中各质点的振动相位相反. 因此, 实际上是介质一种特殊的分段振动现象. 同一段内各质点沿相同方向同时到达各自振动位移的最大值, 又沿相同方向同时通过平衡位置; 而波节两侧各质点同时沿相反方向到达振动位移的正、负最大值, 又沿相反方向同时通过平衡位置. 图 6.27 表示用电动音叉在弦上激起的驻波振动简图. 某时刻电动音叉在 A 点输出一个波列, 传到 B 点被界面(支点)B 反射回来, 入射波与反射波叠加的结果即在 AB 弦上形成驻波.

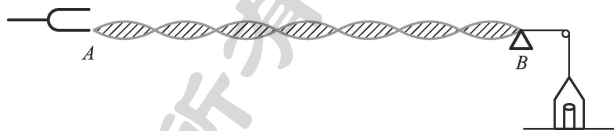


图 6.27 弦上的驻波

对于有限大小的二维介质面同样可以激起驻波振动. 图 6.28 表示一矩形膜上的二维驻波. 其中阴影部分和明亮部分表示相邻部位振动反相, 两者的交界线为波节.

*3. 驻波能量

驻波振动中既没有相位的传播, 也没有能量的传播. 由式(6.38)可知, 入射波的波强与反射波的波强大小相等、方向相反, 即介质中总的波强之矢量和为零. 驻波波强为零并不表示各质点在振动中能量守恒. 例如, 位于波节处的质点动能始终为零, 势能则不断变化. 当两波节间各点的振动位移分别达到各自的正、负最大值时, 各点处的动能均为零, 两节点间总势能最大. 波节附近因相对形变最大, 势能有极大值, 而波腹附近因相对形变最小, 则势能有极小值;

当两波节间各点从同一方向通过平衡位置时,介质中各处的相对形变为零,势能均为零,总动能达到最大值.波腹附近则因振动速度最大而有最大动能,离波节越近,动能越小,其他时刻则动能、势能并存.这就是说,在驻波振动中,一个波段内不断地进行动能与势能的相互转换,并不断地分别集中在波腹和波节附近而不向外传播,故谓之驻波.

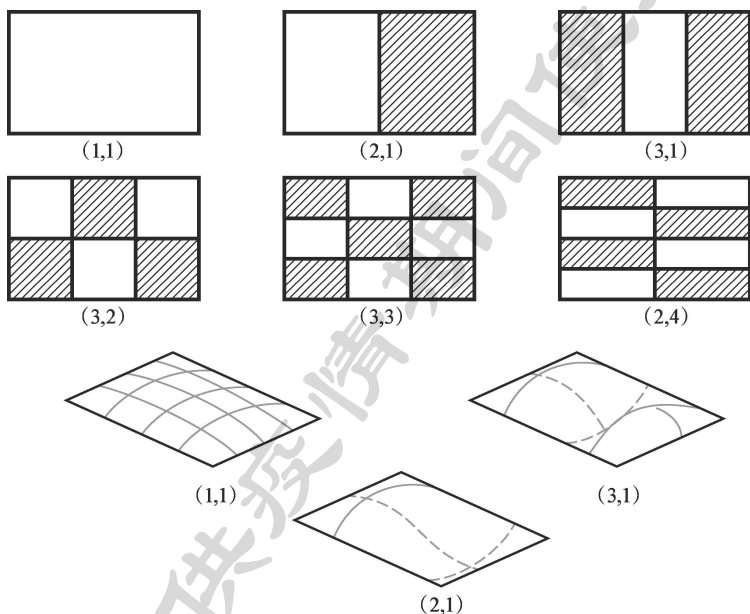


图 6.28 矩形膜上的二维驻波(第三行是第一行的立体图)

6.5.3 半波损失

现在我们把注意力集中在两种介质的界面处.实验发现,在界面处有时形成波节,有时形成波腹,那么规律是什么呢?

理论和实验表明,这一切均取决于界面两边介质的相对波阻.

波阻(波的阻抗)是指介质的密度与波速之乘积 ρu .相对波阻较大的介质称为**波密介质**,反之称**波疏介质**.实验表明:波从波疏介质入射而从波密介质上反射时,界面处形成波节;波从波密介质入射而从波疏介质上反射时,界面处形成波腹.

如果在界面处形成波节,则表明在界面处入射波与反射波的相位始终相反,或者说在界面处入射波的相位与反射波的相位始终存在着 π 的相位差,这种现象叫作**半波损失**(或称作**半波突变**).由上面讨论可知,要使反射波产生半波损失的条件是:波从波疏介质入射并从波密介质反射;对于机械波,还必须是正入射.

如果在界面处形成波腹,则表明在界面处入射波与反射波的相位始终相同,这时反射波没有半波损失.

“半波损失”是一个很重要的概念,它在研究声波、光波的反射问题时会经常涉及.

* 反射波在界面处相位变化的讨论:

一般情况下,入射到界面处的波动既有反射波又有透射波(如图 6.29 所示).由于弹性介质的连续性和不可入性,在界面处相邻质点的位移(或振动速度)和能流(或应变)必定是连续的.正是这种连续性,使得反射波的相位仅由界面两边介质的相对波阻来决定.

设入射波、反射波、透射波的表达式分别为

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u_1} \right) \\ y'_1 &= A'_1 \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u_1} \right) + \varphi_1 \right] \\ y_2 &= A_2 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u_2} \right) + \varphi_2 \right] \end{aligned} \quad (6.60)$$

若以界面处为坐标原点,以界面处振动速度和能流连续性为出发点,则可得

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial y'_1}{\partial t} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial y_2}{\partial t} \right)_{x=0}$$

经整理,得

$$A_1 \sin \omega t + A'_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (6.61)$$

另据能流公式(6.36),并考虑到其在界面处的连续性,可得

$$\rho_1 u_1 [A_1^2 \sin^2 \omega t - A'^2_1 \sin^2(\omega t + \varphi_1)] = \rho_2 u_2 A_2^2 \sin^2(\omega t + \varphi_2) \quad (6.62)$$

将式(6.62)与式(6.61)相除,即得

$$\rho_1 u_1 [A_1 \sin \omega t - A'_1 \sin(\omega t + \varphi_1)] = \rho_2 u_2 A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

再将式(6.61)代入上式,即得

$$\rho_1 u_1 [A_1 \sin \omega t - A'_1 \sin(\omega t + \varphi_1)] = \rho_2 u_2 [A_2 \sin \omega t + A'_1 \sin(\omega t + \varphi_1)]$$

整理,得

$$\frac{A'_1 \sin(\omega t + \varphi_1)}{A_1 \sin \omega t} = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2}{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2} \quad (6.63)$$

或为

$$\frac{A'_1}{A_1} \cos \varphi_1 + \frac{A'_1}{A_1} \sin \varphi_1 \cot \omega t = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2}{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2} \quad (6.64)$$

式(6.64)应对任一时刻 t 均成立,故有

$$\frac{A'_1}{A_1} \sin \varphi_1 = 0 \quad (6.65)$$

$$\frac{A'_1}{A_1} \cos \varphi_1 = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2}{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2} \quad (6.66)$$

由式(6.65)知 φ_1 只能取 0 或 π 值,代入式(6.66),有

当 $\varphi_1 = 0$ 时, $\cos \varphi_1 = 1$, 即

$$\frac{A'_1}{A_1} = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2}{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2} > 0 \quad (6.67)$$

当 $\varphi_1 = \pi$ 时, $\cos \varphi_1 = -1$, 即

$$-\frac{A'_1}{A_1} = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2}{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2} < 0 \quad (6.68)$$

由上两式可知,当 $\rho_1 u_1 > \rho_2 u_2$ 时, $\varphi_1 = 0$, 即入射波所在介质的波阻大于透射波所在介质的波阻时,反射波的相位与入射波的相位相同;当 $\rho_1 u_1 < \rho_2 u_2$ 时, $\varphi_1 = \pi$, 即入射波所在介质为波疏介质,而透射波所在介质为波密介质时,反射波的相位与入射波的相位相差为 π , 即这时出现了相位突变(或说发生了半波损失).

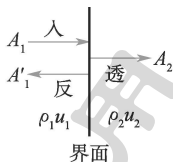


图 6.29 波阻对反射波相位的影响

* 6.5.4 简正模式(自本征振动)

如果将拉紧的弦两端固定,当轻击弦使之产生出向右行进的波时,这波传到弦的右方固定端处被反射,再当此左行反射波到达左方固定端时,又发生第二次反射,如此继续也能形成驻波.因弦的两端固定,其必然形成波节,因而驻波的波长必然受到限制,驻波波长与弦长 l 间必须满足

$$l = n \frac{\lambda}{2}, \text{即 } \lambda = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

而波速 $u = \lambda\nu$,从而对频率也有限制,允许存在的频率为

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{n}{2l}u \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.69)$$

对于弦线,因 $u = \sqrt{T/\mu}$,所以

$$\nu = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (6.70)$$

其中与 $n = 1$ 对应的频率称为**基频**,其后频率依次称为2次,3次……**谐频**(对声驻波则称基音和泛音).各种允许频率所对应的驻波振动(简谐振动模式)称为**简正模式**(或称**本征振动**).相应的频率为简正频率(或称本征频率).由此可见,对两端固定的弦,这一驻波振动系统,有许多个简正模式和简正频率,即有许多个振动自由度.式(6.69)也适用于两端闭合或两端开放的管(其中为声驻波),若为闭合管则两端为波节,若为开放管,则两端为波腹,图6.30为弦(或管)的几种简正模式.

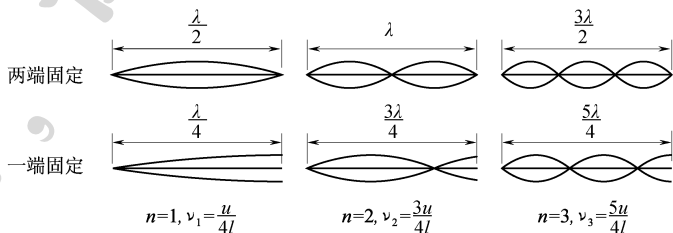


图 6.30 弦(管)振动的简正模式

对一端固定,一端自由的弦(或一端封闭,一端开放的管)也可作类似讨论,对于二维膜也可进行,但要比这复杂得多.实际上各类乐器无非是各种不同质地、形状、长度、大小的管、弦、膜的驻波振动.

上面的讨论表明,无论是管还是弦,只要其长度有限,其固有振动(本征振动)频率就只能取分立值而非连续值.这些结论在德布罗意提出物质波的设想时发挥了作用.德布罗意把电子在原子中能量取分立值叫作取“整数”,又将本征振动频率取分立值也叫作取整数.他说:在光的问题上我们就被迫同时引入微粒思想和波动性思想.另一方面,电子在原子中的稳定运动的确定引入了整数.直到今天,物理学上唯一包含“整数”的现象就是干涉和简谐振动模式.这个事实告诉我们,不能把电子认为是单纯的微粒,必须也赋予它波动性特征.

例 6.8

如图 6.31 所示,沿 x 轴正向传播的平面简谐波方程为 $y = 0.2\cos[200\pi(t - \frac{x}{200})]$ (SI),两种介质的分界面 P 与坐标原点 O 相距 $d = 6.0$ m,入射波在界面上反射后振幅无变化,且反射处为固定端.求:(1) 反射波方程;(2) 驻波方程;(3) 在 O 与 P 间各个波节和波腹点的坐标.

解 (1) 由波函数可知,入射波的振幅 $A = 0.2$ m,角频率 $\omega = 200\pi$,波速 $u = 200$ m/s,故波长 $\lambda = \frac{u}{\nu} = 2$ m.由题意知,反射波的振幅、频率和波速均与入射波相同.

入射波在两介质分界面 P 点处的振动方程为

$$y_{\lambda} = y|_{x=d} = 0.2\cos[200\pi(t - \frac{6}{200})]$$

$$= 0.2\cos(200\pi t - 6\pi) = 0.2\cos 200\pi t$$

因为反射点是固定端,所以反射波在 P 点处的振动相位与入射波在该点的振动相位相反,故有

$$y_{\text{反}} = 0.2\cos(200\pi t + \pi)$$

反射波以速度 $u = 200$ m/s 向 x 轴负向传播,在 P 点处的振动方程已经由上式给出,所以反射波方程为

$$y = 0.2\cos[200\pi(t - \frac{6-x}{200}) + \pi]$$

$$= 0.2\cos[200\pi(t + \frac{x}{200}) - 5\pi]$$

$$= 0.2\cos[200\pi(t + \frac{x}{200}) - \pi]$$

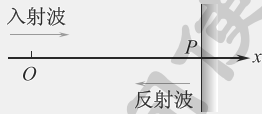


图 6.31

(2) 驻波方程为

$$y = 0.2\cos[200\pi(t - \frac{x}{200})] + 0.2\cos[200\pi(t + \frac{x}{200}) - \pi]$$

$$= 0.2\cos[200\pi(t - \frac{x}{200})] - 0.2\cos[200\pi(t + \frac{x}{200})]$$

$$= 0.4\sin \pi x \sin 200\pi t$$

(3) 由 $\pi x = 2k \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, 6$)

得波节点的坐标为 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

由 $\pi x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 5$)

得波腹点的坐标为

$$x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}$$

6.6 多普勒效应 *冲击波

6.6.1 多普勒效应

在前面几节的讨论中,我们实际上是假定了波源和观察者相对于介质都是静止的,这时观察者接收到的波的频率与波源的振动频率相等.但是,在日常生活和科学技术中,经常会遇到波源或观察者,或者这两者同时相对于介质运动的情况,那么,这时观察者接收到的波的频率与波源的振动频率是否依然相等呢?例如,站在站台上,当一列火车迎面飞驰而来时,我们听到它的汽笛声高昂,而当火车从我们身边疾驰而去时,却听到它的汽笛声变得低沉.实际上,火车鸣笛的音调并未改变(波源的振动频率未变),而火车接近和驶离我们时,人耳接收到的频率却不同.这些现象表明:当波源或观察者,或者两者同时相对于介质有相对运动时,观察者接收到的波的

科学家介绍



多普勒

频率与波源的振动频率不同,这类现象是由多普勒(J. C. Doppler)于 1842 年发现并提出的,故称为**多普勒效应**或者**多普勒频移**。

为简单起见,我们将介质选为参考系,并假定波源和观察者的运动发生在两者的连线上.用 v_S 表示波源相对于介质的运动速度, v_B 表示观察者相对于介质的运动速度, u 表示波在介质中的传播速度.并规定:波源和观察者相互接近时 v_S 和 v_B 取正值,相互远离时 v_S 和 v_B 取负值.值得注意的是,波速 u 是波相对于介质的速度,它只决定于介质性质,而与波源或观察者的相对运动无关,它恒为正值.在具体讨论之前,读者应将前面提到的 3 种频率(波源振动频率 ν_S ,介质的波动频率 ν ,观察者的接收频率 ν'_B) 严格区分开来.实际上, ν_S 、 ν 的定义在前面章节已有说明,接收频率则是指接收器(观察者)在单位时间内接收到的完整波的数目.虽然对波动频率和接收频率均有 $\nu = \frac{u}{\lambda}$ 成立,但它们却是在不同的参考系中.即波动频率是以介质为参考系,接收频率是以接收者为参考系,在 $\nu'_B = \frac{u'}{\lambda'}$ 式中, u' 、 λ' 是观察者测得的波速和波长。

显然,在波源和观察者均相对于介质为静止时,没有多普勒频移,即 $\nu_B = \nu = \nu_S$,因此,多普勒效应是针对下面 3 种情况。

(1) 波源不动,观察者以 v_B 相对于介质运动($v_S = 0, v_B \neq 0$)。

设观察者向着波源运动,即 $v_B > 0$,则波相对于观察者的速度为 $u' = u + v_B$,在不涉及相对论效应时,有 $\lambda' = \lambda$,所以单位时间内,观察者接收到的完整波形的数目,即观察者实际接收到的波的频率为

$$\nu'_B = \frac{u'}{\lambda} = \frac{u + v_B}{uT} = \frac{u + v_B}{u} \nu_S = \left(1 + \frac{v_B}{u}\right) \nu_S > \nu_S \quad (6.71)$$

上式表明,观察者向着波源运动时,接收到的频率为波源振动频率的 $\left(1 + \frac{v_B}{u}\right)$ 倍;当观察者远离波源运动时,式(6.71) 仍可适用,只要将式中 v_B 取为负值即可,显然,这时观察者所接收到的频率会小于波源的振动频率;特别地,当 $v_B = -u$ 时, $\nu'_B = 0$. 这就是观察者随着波的传播以波速远离波源运动的情况,当然观察者就接收不到波动了。

(2) 观察者不动,波源以速度 v_S 相对于介质运动($v_S \neq 0, v_B = 0$)。

如图 6.32 所示,先假设波源 S 以 v_S 向着观察者运动.因为波在介质中的传播速度 u 只决定于介质的性质,与波源的运动与否无关,所以这时波源 S 的振动在一个周期内向前传播的距离就等于一个波长,即 $\lambda = uT$,但由于波源向着观察者运动, v_S 为正,所以在一个周期内波源也在波的传播方向上移动了 $v_S T$ 的距离而达到 S' 点,结果使一个完整的波被挤压在 $S'O$ 之间,这就相当于波长减少为 $\lambda' = \lambda - v_S T$. 因此,观察者在单位时间内接收到的完整波的数

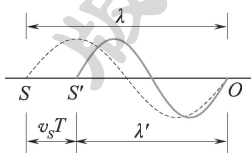


图 6.32

目,即观察者接收到的频率为

$$\nu'_B = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - v_S T} = \frac{u}{uT - v_S T} = \frac{u}{u - v_S} \nu_S > \nu_S \quad (6.72)$$

上式表明:波源向着观察者运动时,观察者接收到的频率为波源振动频率的 $\frac{u}{u - v_S}$ 倍,比波源频率要高;若波源远离观察者运动,则上式依然适用,只是 v_S 应取负值,所以此时观察者接收到的频率 ν'_B 将小于波源的振动频率。

由式(6.72),当 $v_S \rightarrow u$ 时,接收频率 ν'_B 应趋于无穷大,但这是不可能的。当接收频率越来越高时,其波长 λ' 也越来越短,当 λ' 小于组成介质的分子间距时,介质对于此波列不再是连续的了,波列也就不能传播了。

(3) 波源和观察者同时相对于介质运动($v_S \neq 0, v_B \neq 0$)。

根据上面(1)和(2)的讨论知,观察者以 v_B 相对于介质运动时,相对于观察者来说,波的速率变为 $u' = u + v_B$;而波源以 v_S 相对于介质运动时,相当于使波长变为 $\lambda' = \lambda - v_S T$ 。综合这两个结果,则波源和观察者同时运动时,观察者接收到的波的频率为

$$\nu'_B = \frac{u'}{\lambda'} = \frac{u + v_B}{uT - v_S T} = \frac{u + v_B}{u - v_S} \nu_S \quad (6.73)$$

式中,当观察者与波源接近时, v_B, v_S 取正值,远离时 v_B, v_S 取负值。

从以上讨论可以得出结论:在多普勒效应中,不论波源还是观察者运动,或两者都运动,当波源和观察者接近时,观察者接收到的频率 ν' 总是大于波源振动频率 ν ;当波源和观察者远离时 ν' 总是小于 ν 。

*6.6.2 光波多普勒效应

多普勒效应是一切波动过程的共同特征,不仅机械波有多普勒效应,电磁波也有多普勒效应。与机械波不同的是,因为电磁波的传播不需要介质,相应地,在电磁波的多普勒效应中,是由光源和观察者的相对速度 v 来决定观察者的接收频率。用相对论可以证明,当光源和观察者在同一直线上运动时,观察者接收到的频率为

$$\nu_{\text{接近}} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \nu$$

和

$$\nu_{\text{远离}} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \nu \quad (6.74)$$

此外,对于电磁波还有横向多普勒效应,其横向多普勒频移为

$$\nu_{\text{横}} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \nu \quad (6.75)$$

式中 c 为真空中光速, ν 为波源的频率。由式(6.74)可知,当光源远离观察者运动时,接收到的频率变小、波长变长,这种现象称为“红移”,即移向光谱中的红

色一侧.天文学家就是将来自星球的光谱与地球上相同元素的光谱进行比较,发现星球光谱几乎都发生了红移,这说明星球都在远离地球而运动,这一结果已成为所谓“大爆炸”的宇宙学理论的重要证据之一.

多普勒效应在科学技术中还有其他很多重要应用.例如,利用声波的多普勒效应可以测定声源的频率、波速等;利用超声波的多普勒效应来诊断心脏的跳动情况;利用电磁波的多普勒效应可以测定运动物体的速度;此外,多普勒效应还可以用于报警、检查车速等.

*6.6.3 冲击波

由式(6.72)可知,若波源的运动速度大于波在介质中的传播速度,这时接收频率为负值,仅就这一点而言,它在物理上是无意义的.但波源运动速度大于波在介质中传播速度的问题在现代科学技术中却越来越重要.

如图 6.33 所示,当位于 S_1 点的波源以超波速的速度 v_s 向前运动时,波源(物体)本身的运动会激起介质的扰动,从而激起另一种波.这时的运动物体充当了另一种波的波源,这种波是一种以运动物体的运动轨迹为中心的一系列球面波.由于球面波的波速 u 比运动物体的速度 v_s 小,所以就会形成以波源为顶点的 V 字形波,这种波就叫作冲击波.冲击波的包络面成圆锥状,称作马赫锥,其半顶角 α (马赫角)由下式决定:

$$\sin \alpha = \frac{u}{v_s} \quad (6.76)$$

$M = \frac{v_s}{u}$ 称为马赫数.由此可见,在 u 一定时,随着 v_s 的增大,V形波愈加变得尖锐.如果这个冲击波是声波,那么必然是在运动物体通过之后我们才能听到其声.这就是超音速飞机飞过我们头顶之后才听到强烈响声的原因.

当冲击波产生时,除伴有尖锐的噪声之外还有剧烈的打击感.例如原子弹爆炸时,产生的高温气体速度高达 1 000 km/s,它比声速要大很多,其产生的冲击波就具有极大的破坏力.

超音速飞机在空中飞行时,在机头前方产生的冲击波会造成压强的突变,给飞机附加很大的阻力,消耗发动机的能量.因此力图减弱冲击波的强度是超音速飞机(包括导弹等)设计中的重大课题.而宇宙飞船重返大气层时会像流星一样带着熊熊烈火,形成热障.如何利用宇宙飞船船头形成的冲击波来化解“热障”,则是另一个方向的重大课题.带电粒子若以超过光在介质中的传播速度通过介质时,同样会产生冲击波并引发电磁辐射,这种辐射称为切伦科夫辐射.利用切伦科夫辐射原理制成的闪烁计数器已广泛应用于高能物理、农学、医学及生物学中.

例 6.9

一固定的超声源发出频率为 100 kHz 的超声波.一汽车向超声源迎面驶来,在超声源外接收到从汽车反射回来的超声波,从测频装置中测出为 110 kHz,设空气中的声速为 330 m/s,试计算汽车的行驶速度.

解 汽车相对于空气以速度 v_s 趋近于超声源.从超声源发出的超声波到达汽车时,汽车是运动的

接收器.超声波从汽车上反射时,汽车又是以 v_s 运动的声源,因此在固定装置中接收到的反射波频率由

式(6.73)可知:

$$\nu' = \frac{u + v_S}{u - v_S} \nu$$

解得

$$v_S = \frac{\nu' - \nu}{\nu' + \nu} u = \frac{110 - 100}{110 + 100} \times 330 \text{ m/s} = 15.7 \text{ m/s}$$

例 6.10

试根据相对论时空效应导出光波多普勒效应的频变公式.

1. 纵向多普勒效应

如图 6.34 所示,设观察者位于 S 系的原点 O ,光源固定于 S' 系的原点 O' (从 S 系观测 t_1 时刻位于 x_1 处), S' 系以速度 v 沿 x 轴运动,即光源以 v 沿 x 轴远离观察者.又设光波的固有周期为 τ ,光源在一个周期内由 x_1 运动到 x_2 (从 S 系测量,光源到达 x_2 的时刻为 t_2),观察者测知 x_1 处传来的光信号的时间是 $t_1 + \frac{x_1}{c}$, x_2 处传递来的光信号的时间是 $t_2 + \frac{x_2}{c}$,则观察者所接收到的光波周期为

$$\begin{aligned} T &= \left(t_2 + \frac{x_2}{c}\right) - \left(t_1 + \frac{x_1}{c}\right) \\ &= (t_2 - t_1) + \frac{x_2 - x_1}{c} = (t_2 - t_1) + \frac{t_2 - t_1}{c} v \\ &= (t_2 - t_1) \left(1 + \frac{v}{c}\right) \end{aligned}$$

$t_2 - t_1$ 为 S 系中 x_2 和 x_1 两处的时间差,根据相对论时间膨胀效应 $t_2 - t_1 = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$,代入上式得

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tau$$

由此可得观察者接收的频率为

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \nu_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

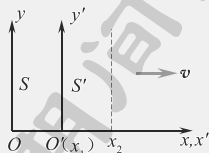


图 6.34 纵向多普勒效应

式中 ν_0 为光波的固有频率,光源离开观察者时 v 为正、趋近时为负.如果光源不动,观察者以速度 v 运动,同样得到这一公式.所以, v 应理解为二者的相对速度.

2. 横向多普勒效应

设光源垂直 x 轴沿图中 y' 方向运动,由于光源运动过程中在 S 系 x 轴的位置不变,即 $\Delta x = 0$,所以,观察者所接收到的周期和频率分别为

$$\begin{aligned} T &= t_2 - t_1 = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \nu &= \nu_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \end{aligned}$$

按照纵向多普勒效应,当光源远离观察者而去时 ($v > 0$), $\nu < \nu_0$ 称为光谱红移;当光源向着观察者运动时 ($v < 0$), $\nu > \nu_0$ 称为光谱蓝移.

*6.7 色散 波包 群速度

6.7.1 色散

前面的讨论指出,在一般情况下,简谐波在弹性介质中传播时,波速只由介质的力学性质决定.即不同频率的波在同一介质中传播时具有相同的速度.这种介质叫作**无色散介质**.但在有些介质中,波的传播速度与频率有关,即不同频率的波在同一介质中传播时波速不同,这种介质叫作**色散介质**.例如,深

水区域里的水面波,其波速 $u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$,即波速与波长或频率有关,这时的水介质即为色散介质,相应的水面波称为色散波。

6.7.2 波包

与振动的叠加类似,在无色散介质中,几个频率相同、振动方向相同的简谐波叠加后,合成波仍然是简谐波(请注意与干涉相区别),但是,即使在无色散介质中,不同频率的简谐波叠加,合成波就不再是简谐波,而是比较复杂的复合波,在复合波中波列的振幅随质元位置 x 时大时小地变化,显现为一团一团地振动,故称之为波群或波包,如图 6.35 所示。

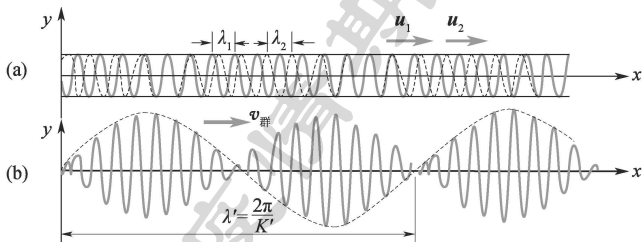


图 6.35 波包

与几列简谐波可以合成为波包相反,一列任意的波,周期性的或者非周期性的波,例如,一个孤立的波包(脉冲波)都可以分解为许多简谐波。

6.7.3 群速度

如果有两列频率相近的简谐波在介质中叠加,就会形成如图 6.36 所示的波包。在图中可以看出,合成波显现为一个波包一个波包地向前传播。图中的包络线(虚线)是波包的形状。这时在介质中有两种传播速度,一个是简谐波的传播速度,即相速度;一个是波包(包络线)的传播速度,称之为群速度。下面的讨论将表明,在无色散介质中,群速度与相速度相等,而在色散介质中,这两种速度则不相等。

设有两列频率相近的简谐波均沿 x 轴正向传播,它们的波函数分别为(为简单起见,设两波振幅相等)

$$y_1 = A \cos(\omega_1 t - K_1 x)$$

$$y_2 = A \cos(\omega_2 t - K_2 x)$$

式中 ω_1, ω_2 分别为两波的角频率, K_1, K_2 分别为两列波的波矢,其中 $K_1 = \frac{\omega_1}{u_1} =$

$\frac{2\pi}{\lambda_1}$, $K_2 = \frac{\omega_2}{u_2} = \frac{2\pi}{\lambda_2}$, u_1, u_2 分别为两列波的相速度, λ_1, λ_2 分别为两列波的波长。

它们合成波的波函数为

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{K_1 - K_2}{2}x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{K_1 + K_2}{2}x\right)$$

$$\text{令 } \omega' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, K' = \frac{K_1 - K_2}{2}, \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \bar{K} = \frac{K_1 + K_2}{2},$$

则

$$y = 2A \cos(\omega' t - K' x) \cos(\bar{\omega} t - \bar{K} x)$$

再令
$$A' = 2A \cos(\omega' t - K' x) \quad (6.77)$$

则有
$$y = A' \cos(\omega t - K x) \quad (6.78)$$

由于 ω_1 和 ω_2 很接近, 即 $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$, 故 A' 变化缓慢, 因此式(6.78)可看成是一列振幅为 A' 作缓慢变化的余弦波. 若坐标 x 取定值, 就是上章讨论的拍振动. 若时间 t 取定值, 就是图 6.36 所示的空间拍, 而方程(6.77) 就是波包的包络线方程, 如图中虚线所示.

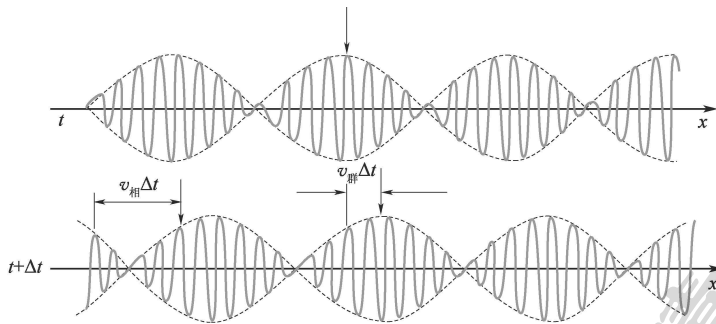


图 6.36 波包的传播

如果我们追踪观察包络线上的某一确定值点, 例如, 最大值点, 则由图 6.36 可以看出, 它在沿 x 方向传播. 有

$$\omega' t - K' x = \text{常数}$$

将上式微分得

$$\omega' dt - K' dx = 0$$

于是得包络线移动的速度, 即群速度为

$$v_{\text{群}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega'}{K'} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_1 - K_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta K}$$

因频差 $\omega_1 - \omega_2$ 很小, 故可用 $\frac{d\omega}{dK}$ 代替 $\frac{\Delta\omega}{\Delta K}$, 即

$$v_{\text{群}} = \frac{d\omega}{dK} = \frac{d(uK)}{dK} = u + K \frac{du}{dK} \quad (6.79)$$

由式(6.79)可知, 对于无色散波, 相速 u 与频率无关, 即 $\frac{du}{dK} = 0$, 于是群速度等于相速度. 这是因为在无色散介质中, 每个分波的相速都相同, 其复合波速度当然也相同于该介质中的相速; 对于色散波, 相速与频率有关, 则 $\frac{du}{dK} \neq 0$, 因而群速不等于相速.

我们知道, 波是传播信息的重要手段, 但只有复合波才能传递信息. 理想的简谐波在无限长的时间内始终以同一振幅和不变的频率传播, 所以不能携带任何信息. 而在复合波中信息传递的速度就是波包移动的速度, 即信息是以群速度传播的.

最后还应该指出, 式(6.79)只是在无色散或色散不大的介质中成立. 在这种情况下, 波包包络线的形状在较长距离中大体保持不变. 如果介质色散较厉害 (du/dK 较大), 则由于各列分波相速差异显著, 波包在传播过程中会逐渐摊平, 终至弥散消失, 这种情况下群速度也就没有意义了.

习 题

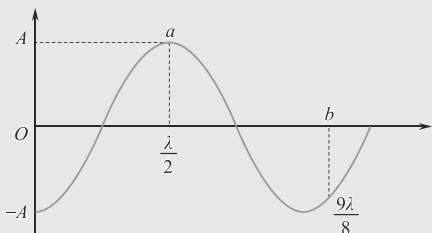
6.1 选择题.

(1) 一平面简谐波在弹性媒质中传播, 在媒质质元从平衡位置运动到最大位移处的过程中 ()

- A. 它的动能转化为势能.
B. 它的势能转化为动能.
C. 它从相邻的一段质元获得能量其能量逐渐增大.
D. 它把自己的能量传给相邻的一段质元, 其能量逐渐减小.

(2) 某时刻驻波波形曲线如题 6.1(2) 图所示, 则 a, b 两点相位差是 ()

- A. π . B. $\pi/2$.
C. $5\pi/4$. D. 0.



题 6.1(2) 图

(3) 设声波在媒质中的传播速率为 u , 声源的频率为 ν_s . 若声源 S 不动, 而接收器 R 相对于媒质以速率 ν_B 沿着 S, R 连线向着声源 S 运动, 则位于 S, R 连线中点的质点 P 的振动频率为 ()

- A. ν_s . B. $\frac{u + \nu_B}{u} \nu_s$.
C. $\frac{u}{u + \nu_B} \nu_s$. D. $\frac{u}{u - \nu_B} \nu_s$.

6.2 填空题.

(1) 频率为 100 Hz, 传播速率为 300 m/s 的平面简谐波, 波线上两点振动的相位差为 $\pi/3$, 则此两点相距 _____ m.

(2) 一横波的波函数是 $y = 0.02 \sin 2\pi(100t - 0.4x)$ (SI), 则振幅是 _____, 波长是 _____, 频率是 _____, 波的传播速率是 _____.

(3) 设入射波的表达式为 $y_1 = A \cos[2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda}) + \pi]$, 波在 $x = 0$ 处反射, 反射点为一固定端, 则反射波的表达式为 _____, 驻波的表达式为 _____, 入射波和反射波合成的驻波的波腹所在处的坐标为 _____.

6.3 产生机械波的条件是什么? 两列波叠加产生干涉现象必须满足什么条件? 满足什么条件的两列波才能叠加后形成驻波? 在什么情况下会出现半波损失?

6.4 波长、波速、周期和频率这四个物理量中, 哪些量由传播介质决定? 哪些量由波源决定?

6.5 波速和介质质元的振动速度相同吗? 它们各表示什么意思? 波的能量是以什么速度传播的?

6.6 振动和波动有什么区别和联系? 平面简谐波波函数和简谐振动方程有什么不同? 又有什么联系? 振动曲线和波形曲线有什么不同? 行波和驻波有何区别?

6.7 波源向着观察者运动和观察者向着波源运动都会产生频率增高的多普勒效应, 这两种情况有何区别?

6.8 已知波源在原点的一列平面简谐波, 波函数为 $y = A \cos(Bt - Cx)$, 其中 A, B, C 为正值恒量. 求:

(1) 波的振幅、波速、频率、周期与波长;

(2) 写出传播方向上距离波源为 l 处一点的振动方程;

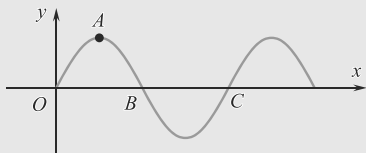
(3) 任一时刻, 在波的传播方向上相距为 d 的两点的相位差.

6.9 沿绳子传播的平面简谐波的波函数为 $y = 0.05 \cos(10\pi t - 4\pi x)$, 式中 x, y 以 m 计, t 以 s 计. 求:

(1) 绳子上各质点振动时的最大速度和最大加速度;

(2) 求 $x = 0.2$ m 处质点在 $t = 1$ s 时的相位, 它是原点在某一时刻的相位? 这一相位所代表的运动状态在 $t = 1.25$ s 时刻到达哪一点?

6.10 题 6.10 图是沿 x 轴传播的平面余弦波在 t 时刻的波形曲线. (1) 若波沿 x 轴正向传播, 该时刻 O, A, B, C 各点的振动相位是多少? (2) 若波沿 x 轴负向传播, 上述各点的振动相位又是多少?



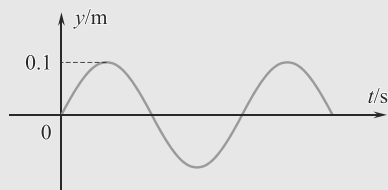
题 6.10 图

6.11 一列平面余弦波沿 x 轴正向传播, 波速为 5 m/s, 波长为 2 m, 原点处质点的振动曲线如题 6.11

图所示。

(1) 写出波函数；

(2) 作出 $t = 0$ s 时的波形图及距离波源 0.5 m 处质点的振动曲线。

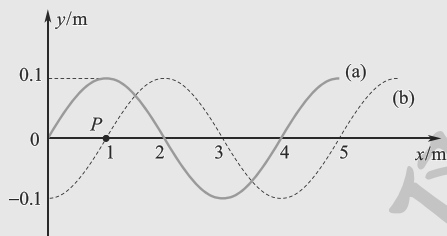


题 6.11 图

6.12 如题 6.12 图所示, 已知 $t = 0$ s 时和 $t = 0.5$ s 时的波形曲线分别为图中曲线 (a) 和 (b), 周期 $T > 0.5$ s, 波沿 x 轴正向传播, 试根据图中绘出的条件求:

(1) 波函数;

(2) P 点的振动方程。



题 6.12 图

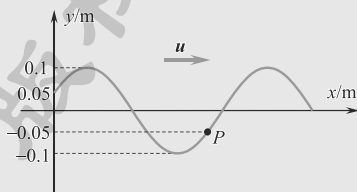
6.13 一列机械波沿 x 轴正向传播, $t = 0$ s 时的波形如题 6.13 图所示, 已知波速为 10 m/s, 波长为 2 m, 求:

(1) 波函数;

(2) P 点的振动方程及振动曲线;

(3) P 点的坐标;

(4) P 点回到平衡位置所需的最短时间。

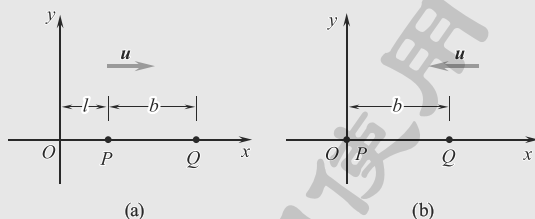


题 6.13 图

6.14 如题 6.14 图所示, 有一平面简谐波在空间传播, 已知 P 点的振动方程为 $y_P = A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

(1) 分别就图中给出的两种坐标写出其波函数;

(2) 写出距 P 点距离为 b 的 Q 点的振动方程。



题 6.14 图

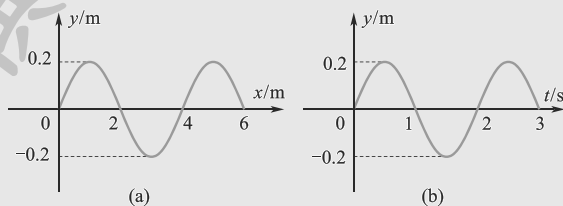
6.15 已知平面简谐波的波函数为

$$y = A \cos \pi(4t + 2x) \quad (\text{SI}).$$

(1) 写出 $t = 4.2$ s 时各波峰位置的坐标式, 并求此时离原点最近一个波峰的位置, 该波峰何时通过原点?

(2) 画出 $t = 4.2$ s 时的波形曲线。

6.16 题 6.16 图中 (a) 表示 $t = 0$ 时刻的波形图, (b) 表示原点 ($x = 0$) 处质点的振动曲线, 试求此波的波函数, 并画出 $x = 2$ m 处质元的振动曲线。



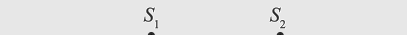
题 6.16 图

6.17 一平面余弦波, 沿直径为 14 cm 的圆柱形管传播, 波的强度为 18.0×10^{-3} J/(m² · s), 频率为 300 Hz, 波速为 300 m/s, 求波的平均能量密度和最大能量密度?

6.18 如题 6.18 图所示, S_1 和 S_2 为两相干波源, 振幅均为 A_1 , 相距 $\frac{\lambda}{4}$, S_1 较 S_2 相位超前 $\frac{\pi}{2}$, 求:

(1) S_1 外侧各点的合振幅和强度;

(2) S_2 外侧各点的合振幅和强度。

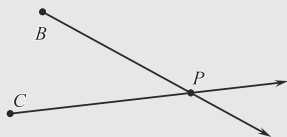


题 6.18 图

6.19 如题 6.19 图所示, 设 B 点发出的平面横波沿 BP 方向传播, 它在 B 点的振动方程为 $y_1 = 2 \times 10^{-3} \cos 2\pi t$; C 点发出的平面横波沿 CP 方向传播, 它在 C 点的振动方程为 $y_2 = 2 \times 10^{-3} \cos(2\pi t + \pi)$,

本题中 y 以 m 计, t 以 s 计. 设 $BP = 0.4 \text{ m}$, $CP = 0.5 \text{ m}$, 波速 $u = 0.2 \text{ m/s}$, 求:

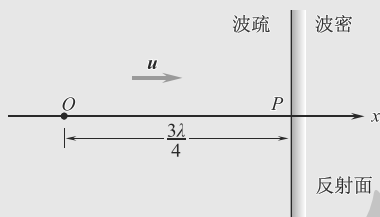
- (1) 两波传到 P 点时的相位差;
- (2) 当这两列波的振动方向相同时, P 点合振动的振幅.



题 6.19 图

6.20 一平面简谐波沿 x 轴正向传播, 如题 6.20 图所示. 已知振幅为 A , 频率为 ν , 波速为 u .

- (1) 若 $t = 0$ 时, 原点 O 处质元正好由平衡位置向位移正方向运动, 写出此波的波函数;
- (2) 若从分界面反射的波的振幅与入射波振幅相等, 试写出反射波的波函数, 并求 x 轴上因入射波与反射波干涉而静止的各点的位置.



题 6.20 图

6.21 驻波方程为 $y = 0.02 \cos 20x \cos 750t$ (SI), 求:

- (1) 形成此驻波的两列行波的振幅和波速;
- (2) 相邻两波节间距离.

6.22 在弦上传播的横波, 它的波函数为 $y_1 = 0.1 \cos(13t + 0.0079x)$ (SI), 试写出一个波函数, 使它表示的波能与这列已知的横波叠加形成驻波, 并在 $x = 0$ 处为波节.

6.23 两列波在一根很长的细绳上传播, 它们的波函数分别为

$$y_1 = 0.06 \cos(\pi x - 4\pi t) \quad (\text{SI}),$$

$$y_2 = 0.06 \cos(\pi x + 4\pi t) \quad (\text{SI}).$$

(1) 试证明绳子将作驻波式振动, 并求波节、波腹的位置;

(2) 波腹处的振幅多大? $x = 1.2 \text{ m}$ 处振幅多大?

6.24 汽车驶过车站时, 车站上的观测者测得汽笛声频率由 1200 Hz 变到了 1000 Hz , 设空气中声速为 330 m/s , 求汽车的速率.

6.25 两列火车分别以 72 km/h 和 54 km/h 的速度相向而行, 第一列火车发出一个 600 Hz 的汽笛声, 若声速为 340 m/s , 求第二列火车上的观测者听见该声音的频率在相遇前和相遇后分别是多少?

本章习题参考答案